

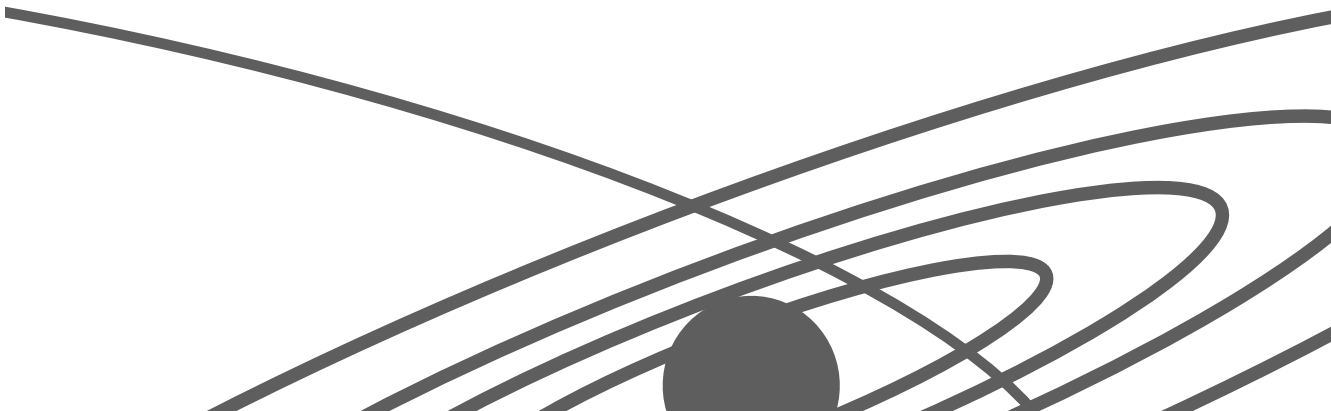
力学

物理とはずがたり

Vol. 1

ver. 0.1.1

MECHANICS



力学

@QuantumAtsuo

2024/01/13

目次

第 1 章 力学の基礎	9
§1 自由度	9
§2 座標	11
§3 位置ベクトル	14
§4 スカラー三重積・ベクトル三重積*	19
§5 速さ	23
§6 極限	26
§7 微分法	30
§8 速度ベクトル	35
§9 微分と極限	37
§10 積分	41
§11 定積分	44
§12 Taylor の定理	50
§13 加速度	56
§14 多変数関数の微積分	58
第 2 章 運動の法則	63
§15 運動の法則	63
§16 Galilei の相対性原理	66
§17 一様重力場	68
§18 摩擦力	75
§19 空気抵抗	80
§20 等速円運動	84
§21 非慣性系	87
§22 対称性	91
§23 エネルギー保存則	94
§24 線積分	98
§25 エネルギーの原理と保存力	102
§26 運動量保存則	107

§27	単振り子	110
§28	二体系の運動方程式	116
§29	弾性衝突	119
§30	撃力	124
§31	単位と次元	129
第 3 章 振動論		132
§32	単振動	132
§33	減衰振動	139
§34	振動の二体問題	142
§35	行列	145
§36	行列式	150
§37	実対称行列の固有値問題	158
§38	振動のモード; 二体系	161
§39	振動のモード; 多体系	164
§40	振動のモード; 周期的境界条件	169
§41	強制振動*	172
§42	共鳴現象*	177
第 4 章 中心力場		183
§43	中心力場の解法	183
§44	極座標	186
§45	中心力場と極座標	191
§46	Coulomb ポテンシャル	195
§47	Newton 重力と場	200
§48	Kepler の法則	203
§49	Laplace–Runge–Lenz ベクトル*	205
§50	天体の三体問題*	207
§51	体積積分	211
§52	曲面上の積分	217
§53	立体角	222
§54	散乱理論	226
§55	散乱問題; 剛体球ポテンシャル	228
§56	散乱問題; Coulomb ポテンシャル	230
第 5 章 剛体の力学		233
§57	非慣性系の運動方程式	233
§58	地球の Coriolis 力	235

§59	剛体の運動方程式	240
§60	慣性モーメントの計算	244
§61	任意の点の周りの回転運動	250
§62	剛体の力学的平衡	252
§63	剛体振り子	255
§64	慣性主軸	259
§65	Euler 角	260
§66	剛体の自由運動	264
§67	円柱の運動	266
§68	撃力を受けた剛体の運動	269
§69	対称コマの運動	271
§70	ジャイロスコープ	276
§71	剛体の Newton 重力理論	281
§72	潮汐力	284
	参考文献	289
	索引	290

序文

本稿は多岐に分かれるあらゆる物理学の諸分野の第一歩である力学を扱います。力学の教科書は幾多もありますが、本稿の特徴としては (i) 数学的な補足を丁寧につけていること、(ii) このあとに続く諸分野への動機づけを意識した補足を入れていること、(iii) 力学の教科書としては省略されがちなテーマ（共鳴現象、三体問題、ジャイロなど）についても数式に基づいて極力丁寧な説明を施していること、が挙げられます。なるべく (i)-(iii) を満たすように心掛けています。

(i) に関しては数学と物理の説明をなるべく分離させることで実現しています。数学の節ではスタイルも少し変えており、通常の数学の教科書のように定義から命題の証明という流れを汲んでいます。

本稿は前提知識としては高等学校のカリキュラムにあるようなレベルの物理学、数学（+化学、生物学）です。カリキュラムの変更などはあまり考慮できていませんが、たとえば複素数は前提とし行列は前提になっていません。今後このような観点で改善されるかもしれません。

各章の内容を簡単にまとめておきましょう。力学の基礎では数学の準備が多めになっているが物理を始めるための最低限の用語を定義します。運動の法則では力学の基礎となる法則を紹介し、保存則や具体的な応用を通して力学の正しさを理解していきます。また高校の教科書にあるトピックについて数学的にも物理的にもより厳密かつ一般的に再学習していくことが裏テーマにあります。振動論、中心力場ではさらなる応用例を紹介します。それにとどまらず振動論では行列を駆使した計算方法を解説し、中心力場では曲面上の積分や立体角を解説した後に散乱問題を議論します。これらは電磁気学、天体力学、素粒子物理学、固体物理学といった広範の現象を記述するための基礎となるものです。最後に剛体の力学では力学特有の応用例として剛体を扱います。剛体の問題は工学（制御理論、構造力学、ロボット工学、航空宇宙学など）への応用が重要です。

1章と2章を学べば残りの章はどの順番でも読んでも問題ははずです。節にアスタリスク(*)が付いているものは数学的に高度だったり発展的な内容のため、最初に読むときにはスキップしても良いことを表します。

明快さのために以下の規則を定めています：

1. 未定義の文字がないこと、重複した文字がないこと
2. 重要な式は異なる節で繰り返してもよい（式参照を使わない）

3. 天下りのでないこと，目的が先行した式変形・定義でないこと
4. 1つの節が長くなりすぎないこと（たかだか10頁までであること）

適宜状況に応じてこれらを破ることもあります。

不定期で更新します。バージョンアップは以下のルールとします：

Major 章・節の追加，全体構成に関わる重大な修正など

Minor 説明，問題の追加，節内の構成に関わる修正など

Patch 画像，式，脚注の追加，誤字の修正，見た目に関わる軽微な修正など

内容に関する質問，間違いの指摘などは Twitter (@QuantumAtsuo) またはメール (but-suri.t0wazugatari@gmail.com) までお願いします。

第 1 章 力学の基礎

§ 1. 自由度

私たちを含めすべての物は時間のながれる空間、**時空間** (spacetime) にいる。物は空間の中で時間の経過とともに動いたり動かなかったりする。物が或る時間に或る場所に存在することを物理学では**時刻** (time) と**位置** (position) で表現する。いつかのどこかに基準となるところを定めてやれば、「ある物がこの時刻にこの位置にあった」とか「ある物がこの位置にあったのはこの時刻であった」ということが数によって表現できる。物の時刻を定めるのには一つの基準となる時刻があって、その時刻からどれだけ経過しているか（もしくはどれだけ過去か）を測りさえすれば定まる。日常生活ではたいてい西暦 0 年 1 月 1 日を基準としている。しかし、位置の場合は状況が異なる。なぜならば物は三次元の空間に置かれたとき、基準となる位置（**原点**）から測らなければならない量の数は状況によって変わってくるからだ。

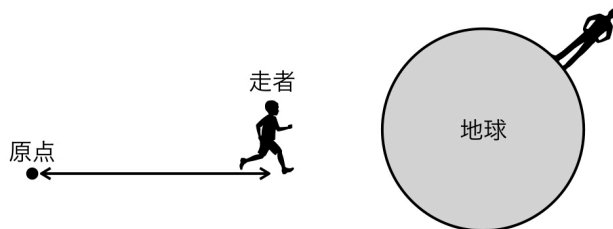


図 1 自由度；50m 走の走者と地球上に立つ人

まず例として 50m 走を考えてみよう。スタート地点を原点とし、スタートの合図の瞬間を基準の時刻とする。そしてスタートから何秒後かのある瞬間を見たとき、走者がどの位置にいるかはスタート地点から走者までの距離を測りさえすればよく、この 1 つの値で走者の位置は定まったといえる。

では次に地球で考えてみる。ただし地球は完全な球形としよう。今度は原点を地球の中心にとって、スタートの合図を基準時刻として何秒後かの或る瞬間を捉えてみる。地球上を自由に歩き回る人がいるとすると、或る時刻にこの人のいる位置を特定するために測るべき量は経度と緯度の 2 つであろう。経度や緯度は赤道と本初子午線を基準としてそこから測った二つの角度で指定する。中心から地表面までの距離はその人がどこにしようが一定なので測るま

でもない。だから逆に言えば、地球が完全な球ではなく地球の地形、山や海溝を考えれば中心からの距離を測って指定しなければならない。あるいは人間ではなく鳥や飛行機のように空を飛んだり、魚や潜水艦が海に潜るような運動でも位置を定めるには同じく 3 つの量、経度・緯度・中心からの距離（高度・水深）を測る必要がある。

このような物体の運動を記述する際、位置を定めるために各時刻で測らなければならない量の個数を**自由度** (degree of freedom) という。上の例で言えば、50m 走の場合は 1、完全な球状の地球の上を歩く人の場合は 2 となる。三次元の真空を何の制約もなく運動する粒子（大きさを持たない点）の自由度は 3 である。しかし粒子が二個あると物体の位置を定めるにはそれぞれ測らなければならないから自由度は $2 \times 3 = 6$ で、一般に粒子が N 個あれば自由度は $3N$ となる。

2 個の粒子が一定の長さを保った結合を成して分子のようにになっている状態での自由度はどうなるであろうか。まず片方の粒子の位置を定めるのに 3 つ測らなければならない。そうすると、後はもう一方の粒子がどの方向にくっついているかを測れば分子の位置は完全に定まってしまう。したがって測らなければならない量はさらに角度 2 つ¹⁾、全部合わせて 5 つ測れば良いことがわかる。ゆえに自由度は 5 である。バラバラの 2 粒子のときの自由度が 6 であったから分子になっているときは自由度が 1 少ない。一定長さで結合しているというような条件を**拘束条件** (constraint condition) といい、それが無いときより自由度がいくらか落ちる。

再び 50m 走の例を考えると、走者も地球上を走る限りは自由度は 3（高度を考えないときは 2）である。ところが「走者はコースに沿って走らなければならない」という拘束条件のために自由度が 1 まで落ちるのである。

普通、私たちが目にする物体というのは大きさがあり形を持つ。そのため傾いた状態や回転している状態を区別しなければならない。すなわち自由度は増える。また普通の物体は変形したりして運動の中で状態が変化することもある。こうした滑らかな変形などは自由度が無限大である。しかしながらこれらのことを考慮に入れると力学の基礎を学ぶ上で非常に面倒であるので、まずは大きさを持たず変形しない点状の粒子を扱う。この仮想的な点状粒子のことを**質点** (mass point) という。以下で物体または粒子と言ったときには、特に断りがない限り、質点を意味することとする。大きさのある物体については剛体の章で触れることにする。

私たちが物体の運動を考えるときにはその物体とそれを取り囲む環境や拘束条件などを一緒に考察する。これらを物理学的な**系** (system) という。

PROBLEM

PROBLEM1. 2 個の粒子がひもで結ばれているときの自由度を数えよ。

SOLUTION. ひもは縮むことができるため縮んだ長さを測る必要がある。よって自由度は 6 である。ひもによる拘束は自由度を落とさないが 2 個の粒子の動き回れる範囲は制限される。このような制約は

¹⁾ 結合の長さを R とすると、半径 R の球面上のどこかにもう一方の粒子は存在する。こうして考えると完全な球体の地球の例と同じであることがわかるだろう。

境界条件とよばれる。

PROBLEM2. 空間次元が四次元するとき，真空に置かれた粒子の自由度を数えよ．また一般に d 次元での自由度を数えよ．

SOLUTION. 四次元では三次元のとくに加えてもう一つ測る量が現れる（例えば時間）．ゆえに自由度は 4 である．1,2,3,4 次元の自由度を数えると粒子 1 個の自由度は 1,2,3,4 である．次元が 1 つ増えるごとに自由度も 1 増えると言える．一般に d 次元での自由度は d である．

§2. 座標

この節では自由度に見合った量を測るための数学的な手段を用意しよう．それが**座標** (coordinate) である．まず**直交座標** (Cartesian coordinate) という種類の座標を導入する．当面はこの測り方だけで問題ない．三次元空間に導入される直交座標には目盛のついた 3 つのまっすぐな軸があり，それぞれ x 軸， y 軸， z 軸という（区別できれば軸の名前はなんでも良い）．3 軸は 1 点で直交しており，この直交する点 O を座標の**原点** (origin) といい，測るための基準点にとる．だからこの点では目盛の値は 3 軸とも 0 となっている．そうして三次元空間の任意の点に対して，3 軸の目盛の値を読み取ればその点の位置は定まる．

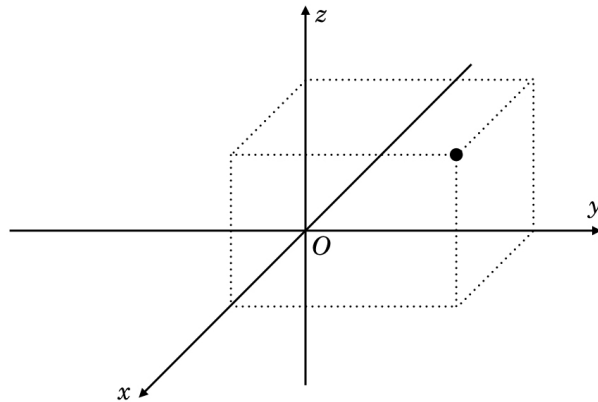


図2 直交座標

3 軸から読み取られる 3 つの数の組を

$$(x, y, z), \quad (2.1)$$

のように表記する．とくに原点は $(0, 0, 0)$ である．点 A の座標が (a_x, a_y, a_z) ，点 B の座標が (b_x, b_y, b_z) であったとしよう．2 点間の距離 d は三平方の定理から，

$$d = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2}, \quad (2.2)$$

である．

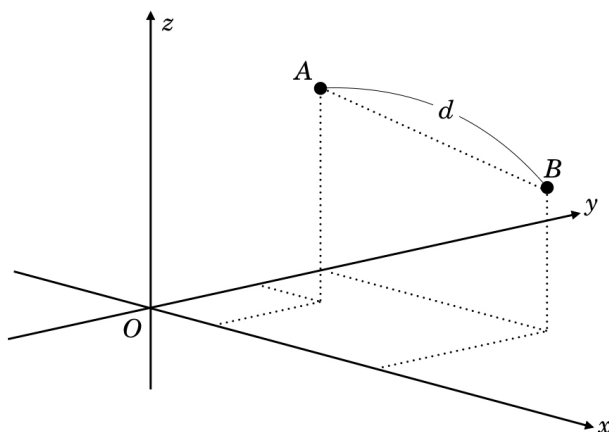


図 3 直交座標における 2 点間の距離

物体は時間とともに動くので座標は時間の関数となる．ある時刻 t での物体の位置は

$$(x(t), y(t), z(t)), \quad (2.3)$$

と表記する．たとえば時刻 $t = t_0$ から $t = t_1$ までの座標の点 $(x(t), y(t), z(t))$ の集合は 1 つの曲線となるだろう．これを物体の軌道 (trajectory) という．

物理学ではふつう原点は観測する主体 (人間) の位置である．観測者と彼を原点とする座標軸と観測対象をまとめた系のことを座標系 (coordinate system) という．座標系を一つ定めることではじめて物理の問題を考察できる．

たとえば，時速 50km で走る車に乗っている人が物の運動を観測するとしよう．原点 (観測者) は車と一緒に動くので，地面に置かれて静止している物体は (時速 50km で) 動いて見える．あるいは車と同じ向きに時速 50km で動いている物体はこの観測者からは止まって見える．私たちが普通「動いている」と言うものは「地面に立つ観測者に対して動いている」ものということである．ところがそのようなことは重要ではない．地面はすなわち地球のことであり，地球は太陽にいる観測者に対して自転・公転している．またその太陽も自転し銀河の中を回転運動している．「動いている」ということは常に何かに対してであり**相対的** (relative) である．そうすると静止していることと動いていることに大きな違いはないように思える．ある物体が静止するとは，その物体と観測者が一緒に動きをしているということであり，私たちが地面にある物が「静止している」と言っているのはそれと自分が地球と一緒に動いているということの言い換えにすぎない．座標系を一つに決めてはじめてその系で静止している物体が何かを判断できる．日常の中では地面が静止しているとするような座標系を無意識のうちに私たちは選んでいるのである．

座標系の例をもう少し挙げてみよう．50m 走の場合はコースに沿って軸を 1 本設定すれば十分である．このコースが曲がっていても座標軸を同じように曲げれば問題なく測れる．

地球の場合は高度，水深を測るための軸が地球の中心から (1 本ではあるが) 放射状に伸び

ていなければならない。緯度・経度を測るために必要な座標軸は分度器のような円形の軸である。経度は -180 度から 180 度まで測れる円形の軸、緯度は -90 度から 90 度まで測れる半円形の軸が必要である。またこの二つの分度器は直交させておく。このように導入される座標系を**球座標** (spherical coordinate) あるいは**球面極座標**という。極とは中心のことである。この座標系については円運動の節で数学的に導入することにしよう。

上記以外にも無限に多くの座標を導入することが可能である。そして計算の都合や理論の見通しを良くするために自由に座標を設定すれば良い。座標の導入は自然法則を記述するために人間が勝手に選んだ測り方にすぎない。自然法則はある種の性質の良い座標ではすべて同一でなければならない。その性質とは通常、慣性の法則とよばれるもので、これが成り立つ系では物体の静止（より正確には自由な運動）が自然に定義できるのである。

少し勇み足な注意をしておく、自然とこの数学的概念であるところの座標系は厳密に同一のものではない。われわれはこの2つを同一視するのであって自然の中に座標系を設定するのではない。自然の1点を座標の中の1点に対応させることで物理学を考察するのである。したがって座標の目盛りが等間隔であるとか真っ直ぐであるということは自然の実際ではなく、自然がそうなっていると仮定してそのような座標系に対応付けているのである。そして実際これは正確ではなく実は自然（時空）は歪んでおり真っ直ぐではないことが多々ある。このような時空自体の構造がどのように歪んでいるかは一般相対性理論によって議論される。

PROBLEM

PROBLEM1. 点 A, B の座標が $(1, 2, 3)$ と $(5, 3, 2)$ のとき AB 間の距離を計算せよ。

SOLUTION. 式 (2.2) へ代入して

$$d = \sqrt{(1-5)^2 + (2-3)^2 + (3-2)^2} = 3\sqrt{2}.$$

PROBLEM2. 点 A, B の距離を $d(A, B)$ と書く。このとき $d(A, B) = d(B, A)$ が成り立つことを示せ。

SOLUTION. 式 (2.2) の形から明らか。

PROBLEM3. 点 A, B の距離を $d(A, B)$ と書く。このとき $d(A, B) = 0$ ならば必ず $A = B$ が成り立つことを示せ。

SOLUTION. 式 (2.2) の2乗より、

$$0 = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2.$$

右辺の各項は必ず0以上なので等式が成立するためには

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z,$$

でなければならない。これはすなわち $A = B$ である。逆に $A = B$ ならば $d(A, B) = 0$ は明らか。

PROBLEM4. **三角不等式**: 点 A, B の距離を $d(A, B)$ と書く。このとき任意の点 C に対して、

$$d(A, C) + d(C, B) \geq d(A, B),$$

が成立することを示せ。

SOLUTION. 両辺の 2 乗を式 (2.2) からそれぞれ直接計算する. 式の見通しをよくするために, $a_i - c_i = s_i$, $c_i - b_i = t_i$ とおくと,

$$[d(A, C) + d(C, B)]^2 = \sum_{i=x,y,z} (s_i^2 + t_i^2) + 2 \sqrt{\left(\sum_{i=x,y,z} s_i^2 \right) \left(\sum_{j=x,y,z} t_j^2 \right)}$$

$$d(A, B)^2 = \sum_{i=x,y,z} (s_i^2 + t_i^2) + 2 \sum_{i=x,y,z} s_i t_i.$$

よって,

$$[d(A, C) + d(C, B)]^2 - d(A, B)^2 = 2 \sqrt{\left(\sum_{i=x,y,z} s_i^2 \right) \left(\sum_{j=x,y,z} t_j^2 \right)} - 2 \sum_{i=x,y,z} s_i t_i.$$

右辺は Cauchy-Schwarz の不等式

$$\sum_{i=x,y,z} s_i t_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=x,y,z} s_i^2 \right) \left(\sum_{j=x,y,z} t_j^2 \right)},$$

から正である. 等号成立は全ての i で s_i/t_i が等しいとき. これは C が A, B の通る直線上にあることと等価である.

§ 3. 位置ベクトル

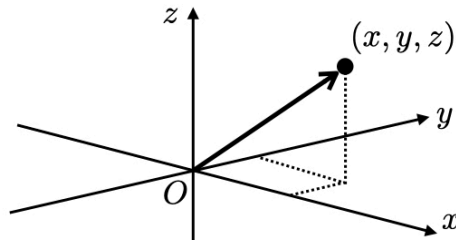


図 4 位置ベクトル

座標系をもう少し扱いやすくするためにベクトルという概念を導入しよう. ベクトルは数学では代数的に定義されるが力学の分野においては幾何的なイメージと対応づけて理解するのがよい. 三次元空間に導入された座標系の各点は測るべき 3 つの量をもって (x, y, z) と書いた. この物体の位置を表す数の組のことを数学的にはベクトル (vector)²⁾ といい, 組の中の数たち x, y, z をベクトルの成分 (component) という. とくに今の場合は点の位置を示しているのであるから, 位置ベクトルという. 位置ベクトルは, 物体が原点から測ってこの位置にあるということ, 原点とその位置を結ぶ一つの矢印 (矢は物体側にある) で表現する. 位置ベクトルは物体がどの向きのどの距離にあるかを指定する.

²⁾ 正確には数ベクトルという.

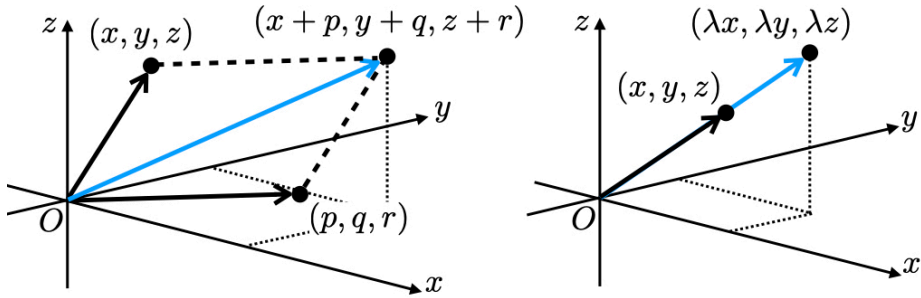


図5 位置ベクトルの加法とスカラー倍

矢印の長さはすなわち原点からの距離であり、

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3.1)$$

で与えられる。ベクトルは一般に次のような演算規則がある：

$$\begin{array}{ll} \text{和} & (a, b, c) + (p, q, r) = (a + p, b + q, c + r) \\ \text{スカラー倍} & \lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{array} \quad (3.2)$$

ここで**スカラー** (scalar) というのは (数の組ではない) ただの数のものでありベクトルと区別するときそうよぶ。はじめ原点から (a, b, c) という点へ移動したとする。次にその点を新しい原点として今度は (p, q, r) へ移動したとすると、その到達点ははじめの原点から測ると $(a + p, b + q, c + r)$ の位置となる。これが上式の位置ベクトルの和の意味である。足し算の性質から明らかに、

$$(a, b, c) + (p, q, r) = (p, q, r) + (a, b, c) = (a + p, b + q, c + r), \quad (3.3)$$

が成り立つ、つまりさっきの移動の順序を逆にしても到達する点は同じ位置ベクトルになる。幾何学的な対応では上式に現れるベクトルが描く図形は平行四辺形で、足したものはその平行四辺形の対角線になっていることがわかる。

ベクトルを数の組ではなく 1 文字で表すとき、普通アルファベットの太字や矢印が上についた文字を使い \mathbf{r} , \vec{r} と表記する (本稿では太字を使う)。この場合ベクトルの長さは $|\mathbf{r}|$, あるいは太字をやめて r と書く。また点 A から点 B へ向かうベクトルの場合は \overrightarrow{AB} と書く (向きと文字の順序をそろえる)。物体の位置ベクトルは原点を O として $\mathbf{r} = \overrightarrow{OX} = (x, y, z)$ のように書く。このとき物体の存在する点 X の座標は (x, y, z) である。原点の位置ベクトルは $(0, 0, 0)$ である。すべての成分が 0 であるベクトルのことを零ベクトルといい、太字で $\mathbf{0}$ とかく。

物理でよく採用されるベクトルの慣習表記を紹介しておこう。ベクトルの計算をするとき横に成分を並べるより縦に並べた方が見やすい。そこで (x, y, z) を、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

と書く。本稿でも式の中では縦書きにする。³⁾ またベクトル \mathbf{a} の i 番目の成分は a_i と表記することが多い。このとき i は数字 1, 2, 3 と思っても軸のラベル x, y, z と思っても良い。成分 a_i を並べたものとして $\mathbf{a} = (a_i)$ のように書くこともある。

空間に 2 点 A, B をとる。2 点の座標は位置ベクトルでそれぞれ、

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

とする。このとき点 A から見た点 B の相対位置ベクトル \mathbf{r}_{AB} とは、

$$\mathbf{r}_{AB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

のことである。 \mathbf{r}_{AB} は、 A を原点と見たときの B の位置ベクトルである。この計算によって別の観測者にとっての位置ベクトルを得ることができる。観測者 Alice の座標の原点を O_A 、観測者 Bob にとっての座標の原点を O_B とする。⁴⁾ このとき任意の点 X の位置ベクトルに関して次が成立する、

$$\overrightarrow{O_A X} = \overrightarrow{O_B X} + \overrightarrow{O_A O_B}.$$

これは異なる観測者間の位置ベクトルの変換式である。

次にベクトルどうしの積について見る。ベクトルの足し算は普通の数と同じように定義されたがベクトルの掛け算は少し異なってくる。ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i, \quad (3.5)$$

で定義される演算をベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} の内積 (inner product) という。内積は 2 つのベクトルから一つのスカラーを与える演算である。内積の定義から明らかに $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ である。ベクトル \mathbf{a} の始点と終点の距離はこのベクトルの大きさと一致しさらに \mathbf{a} どうしの内積に一致する。したがって内積の定義は 2 点間の距離も定義している。

3 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ があって $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$ が成り立っているとしよう。ベクトルの大きさについて、

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \end{aligned}$$

が成り立っていることがわかる。一方この 3 つのベクトルは三角形を形づくっているが、いまベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} の間の角を θ とおく。図のように補助線をいれて三平方の定理から、

$$(\text{補助線の長さ})^2 = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{a}|^2 \cos^2 \theta = |\mathbf{c}|^2 - (|\mathbf{b} - |\mathbf{a}| \cos \theta|)^2,$$

³⁾ 文中では横書きで (x, y, z) と書く。あとで登場する横ベクトルを表記するときは行列と同様にカンマを省いて $(x \ y \ z)$ のように表記する。

⁴⁾ 物理や数学 (特に情報理論) では観測者をアルファベットに対応づけて Alice, Bob, Carol などと名付けることがある。

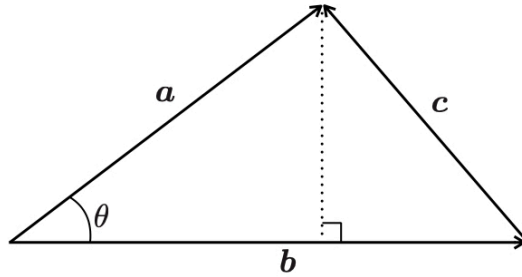


図6 3つのベクトルが作る三角形

が成り立っている．ゆえに余弦定理とよばれる一般公式

$$|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta = |c|^2, \quad (3.6)$$

が得られる．これは三平方の定理の拡張である．さてこれとベクトルの大きさについての式を比べると,

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta, \quad (3.7)$$

がわかる．これから2つのベクトルが与えられれば，その間の角度 θ はわかる．とくに2つのベクトルが直交しているときは $a \cdot b = 0$ である．

ここでベクトルのスカラー倍について考えよう．ベクトル a とそのスカラー倍 $b = \lambda a$ の内積は

$$a \cdot b = \lambda a \cdot a = \lambda |a|^2 = |a||b|,$$

である．つまりベクトル a と b のなす角の大きさは0または π であり，2つのベクトルは平行（または反平行）の関係にあることがわかる．

次に**外積** (exterior product) とよばれる演算を定義する．2つのベクトル a, b に対して，

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

今度は2つのベクトルから1つのベクトルをかえず演算である．定義から $a \times b = -b \times a$ であり演算の順序によって向きを反転させる．容易な計算から，

$$(a \times b) \cdot a = 0 \quad (a \times b) \cdot b = 0, \quad (3.9)$$

となって，ベクトルの外積はもとの2つのベクトルのどちらとも直交していることがわかる．2つのベクトルが平行なとき， $b = \lambda a$ とかけて外積は，

$$a \times b = 0, \quad (3.10)$$

となる．外積が2つのベクトル両方に垂直というのはこの2つのベクトルの存在する平面に対して垂直ともいえる．2つのベクトルが平行のときはそういう平面が無限に存在し1つに定まらないので外積は意味を持たないのである．

外積の大きさについてみてみよう。大きさの 2 乗はやや長い計算の後、

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

すなわち、

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta. \quad (3.11)$$

この表式から 2 つのベクトルの外積の大きさは ($0 < \theta < \pi$ ならば) 2 つのベクトルの和が描く平行四辺形の面積になっていることがわかる。

ベクトルの内積に関しては次の有名な不等式を導くことができる：

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2. \quad (3.12)$$

この不等式は **Cauchy–Schwarz の不等式** と呼ばれる。(3.7) をみれば導出は容易で、両辺を二乗すると、

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2,$$

を得る。ここで $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であることを用いた。Cauchy–Schwarz の不等式のベクトル表記をやめて成分を直接かけば、

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2), \quad (3.13)$$

である。Cauchy–Schwarz の不等式は内積のもつ重要な性質の一つである。上の導出では 2 つのベクトルの成す角度についての不等式から導いたが、本質的なことは内積の正定値性にある。正定値性とは、任意のベクトル \mathbf{a} の自分自身との内積 $|\mathbf{a}|^2 := \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ は必ず 0 以上であり、0 に等しくなるのは $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のときのみである、という性質のことである (問題参照)。

PROBLEMS

PROBLEM1. ベクトル $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ と $\mathbf{b} = (5, 3, 2)$ の内積と外積を計算せよ。

SOLUTION.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 17 \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

PROBLEM2. 任意の実数 λ に対してベクトル $\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ が正定値であることから Cauchy–Schwarz の不等式を導け。

SOLUTION. 正定値性から自分自身との内積が 0 以上なので次の不等式が任意の λ に対して成り立つ：

$$|\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \lambda^2 |\mathbf{b}|^2 \geq 0.$$

この不等式を λ についての 2 次不等式と思うと、不等式の意味は「左辺で表される放物線が λ 軸と 2 つ以上交点を持たない」と解釈できる。この条件は「(左辺) = 0 の判別式が 0 以下」と等価である。ゆえに判別式 D について、

$$D = (2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - 4|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \leq 0,$$

となる。これはまさに Cauchy-Schwarz の不等式である。

PROBLEM3. **Heron の公式**: 三辺の長さが a, b, c の三角形の面積が

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

で与えられることを示せ。ただし $s = (a+b+c)/2$ 。

SOLUTION. 三角形の辺 a, b のなす角を θ とおくと面積は

$$S = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2}ab \sin \theta.$$

余弦定理より $a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2$ であるが、 $\cos \theta$ についてとくと

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

なので θ を消去できて

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 + c^2]} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}. \end{aligned}$$

最後に $s = (a+b+c)/2$ とおけば Heron の公式を得る。

PROBLEM4. **方向ベクトル**: 任意のベクトル \mathbf{a} に対して、 \mathbf{a} と平行で大きさが 1 のベクトルが以下で与えられることを示せ:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}.$$

SOLUTION. 平行なのである実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ を用いて $\mathbf{n} = \lambda\mathbf{a}$ とおける。大きさが $|\mathbf{n}| = 1$ なので

$$1 = |\mathbf{n}|^2 = \lambda^2|\mathbf{a}|^2.$$

ゆえに正の方を選べば $\lambda = |\mathbf{a}|^{-1}$ がわかる。

§4. スカラー三重積・ベクトル三重積*

この節では三次元のベクトルの二つの演算、内積と外積についての便利な計算方法について紹介する。ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} の内積は成分で書くと

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i, \quad (4.1)$$

と書ける。外積を成分で簡単に書くために次の記号を導入しよう：添字 i, j, k を 1, 2, 3 のいずれかとするとき

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & 123, 231, 312 \text{ のとき} \\ -1 & 132, 213, 321 \text{ のとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}, \quad (4.2)$$

と定義されるこの記号を **Levi-Civita 記号** という。Levi-Civita 記号の主たる性質はその完全反対称性である。すなわちどの 2 つの添字を入れ替えても符号が変わるのである。2 回 2 つの添字の入れ替えを行うと符号はもとに戻る。

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = \epsilon_{kij}. \quad (4.3)$$

Levi-Civita 記号を用いると、外積の i 成分がいたってシンプルにかけて、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (4.4)$$

例えば第 1 成分についてみれば、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1 = \sum_{j,k} \epsilon_{1jk} a_j b_k = \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2.$$

他の成分でも成り立っていることはたやすく確かめられる。

内積と外積の合成について考えよう。まず 3 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対して次が成り立つ：

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (4.5)$$

これをスカラー三重積という。

スカラー三重積に戻ろう。上の記法で第 1 式は、

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \sum_i a_i (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_i = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k.$$

右辺で a_i, b_j, c_k を順繰りに並べ替えれば Levi-Civita 記号の符号は変わらずに示したい残りの 2 つの結果を与える。たとえば、

$$\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \sum_{i,j,k} \epsilon_{jki} b_j c_k a_i = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}),$$

である。スカラー三重積の意味を幾何学的に考えてみよう。内積の性質からベクトル \mathbf{a} と $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ のなす角を θ とすると $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \cos \theta$ 。外積の大きさ $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ はベクトル \mathbf{b} と \mathbf{c} が作る平行四辺形の面積に等しい。また $|\mathbf{a}| \cos \theta$ は位置ベクトル \mathbf{a} から平行四辺形に下ろした垂線の長さに等しい。したがってスカラー三重積 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ は 3 つのベクトルが作る平行六面体の体積に等しい。平行六面体はどの面を底面としても同じ計算方法で体積が求まることを上の公式は示している。

次にやはり 3 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対して、

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}, \quad (4.6)$$

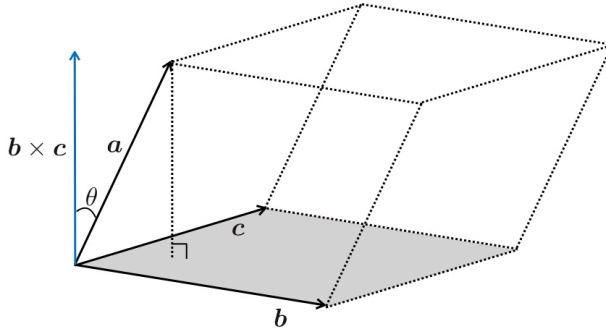


図7 スカラー三重積の幾何学的解釈

が成り立つ。これはベクトル三重積とよばれる。この証明には2つの Levi-Civita 記号の積に関する次の恒等式を用いる⁵⁾：

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{abc} = \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc} + \delta_{ib}\delta_{jc}\delta_{ka} + \delta_{ic}\delta_{ja}\delta_{kb} - \delta_{ia}\delta_{jc}\delta_{kb} - \delta_{ic}\delta_{jb}\delta_{ka} - \delta_{ib}\delta_{ja}\delta_{kc}. \quad (4.7)$$

ただし左辺に現れる記号は **Kronecker のデルタ** とよばれ、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}, \quad (4.8)$$

と定義される。Kronecker のデルタは添字の入れ替えに対して対称で $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ である。2つの Levi-Civita 記号の添字のうち i と a が同じ添字だとして和をとる（このような操作を縮約をとるといふ）。つまり、

$$\begin{aligned} & \sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ibc} \\ &= \sum_i \left[\delta_{ii}\delta_{jb}\delta_{kc} + \delta_{ib}\delta_{jc}\delta_{ki} + \delta_{ic}\delta_{ji}\delta_{kb} - \delta_{ii}\delta_{jc}\delta_{kb} - \delta_{ic}\delta_{jb}\delta_{ki} - \delta_{ib}\delta_{ji}\delta_{kc} \right], \end{aligned}$$

$\sum \delta_{ii} = 3$, $\sum \delta_{ji}\delta_{ik} = \delta_{jk}$ であることをもちいれば、

$$\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ibc} = \delta_{jb}\delta_{kc} - \delta_{jc}\delta_{kb}. \quad (4.9)$$

⁵⁾ 行列についての知識があれば右辺が次の行列式に書けることがわかるだろう：

$$\begin{vmatrix} \delta_{ia} & \delta_{ib} & \delta_{ic} \\ \delta_{ja} & \delta_{jb} & \delta_{jc} \\ \delta_{ka} & \delta_{kb} & \delta_{kc} \end{vmatrix}.$$

では示したい式に戻ろう。上の結果を用いれば、

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))_i &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j \left(\sum_{l,m} \epsilon_{klm} b_l c_m \right) \\
 &= \sum_{j,l,m} \left(\sum_k \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \right) a_j b_l c_m \\
 &= \sum_{j,l,m} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \\
 &= \sum_j a_j b_i c_j - \sum_j a_j b_j c_i \\
 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) b_i - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) c_i.
 \end{aligned}$$

したがって所期の式を得る。

ついでに2つの Levi-Civita 記号の添字のうち i と a , j と b がそれぞれ同じとして和をとる計算をしてみよう。同様の計算から、

$$\sum_{i,j} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijc} = \sum_j (\delta_{jj} \delta_{kc} - \delta_{jc} \delta_{kj}) = 2\delta_{kc}. \quad (4.10)$$

さらに3つの添字がそれぞれ同じ場合は、

$$\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 2 \sum_k \delta_{kk} = 6, \quad (4.11)$$

となる。

PROBLEM

PROBLEM1. (4.5) と (4.6) を成分を直接計算することによって示せ。

SOLUTION. (省略)

PROBLEM2. スカラー四重積: 次が成り立つことを示せ、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

ただし \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} はベクトル。

SOLUTION. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を1つのベクトルと見て (4.5) を適用すると、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{c} \cdot [\mathbf{d} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})].$$

(4.6) を $[\dots]$ に用いて、

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \mathbf{c} \cdot [(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}] \\
 &= (\mathbf{d} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}),
 \end{aligned}$$

を得る。

PROBLEM3. Jacobi 恒等式: ベクトル三重積に関して次が成り立つことを示せ、

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

ただし $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ はベクトル.

SOLUTION. ベクトル三重積の公式から

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

両辺に $0 = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ を加えると,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}.$$

内積は対称 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ であることに注意すれば,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}),$$

がわかる.

PROBLEM4*. 2次元の Levi-Civita 記号 ϵ_{ij} を

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1 \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0,$$

で定義する. 次の成り立つことを示せ:

$$\sum_{i=1}^2 \epsilon_{ij} \epsilon_{ik} = \delta_{jk}, \quad \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} = 2,$$

$$\det A = \sum_{ij} \epsilon_{ij} a_{1i} a_{2j}.$$

ただし $A = (a_{ij})$ は 2×2 の正方行列.

SOLUTION. 成分を直接計算すればたやすく確かめられる.

§5. 速さ

物体が運動できるのはなぜかといえば, 時間が流れているからである. この時間の流れの中で物体はその位置を刻々と変えていく. これを物体の**時間発展** (time evolution) という. そのため物体の位置は時間の関数になるはずである:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

ベクトルが時間の関数とは, ベクトルの各成分が時間の関数であることを意味している.

物体が時間発展すると上図のような1つの軌道を xyz 座標空間に描く. これが現実世界での粒子の軌道と一致すれば物理学的な意味をもつのである. もう一つ重要なことは物体がその軌道をどれくらいの時間を要して辿るのかということである. 軌道の時間発展を運動といい, 運動を求めることが物理学の一つの大きな問題である. もしそれが可能ならば, 例えば物体のこれまでの軌道の情報からこれから先の軌道を予測することができるようになる.

そこで物体の運動を記述するのに物体の速さについて考えよう. ただし物理学において速さと速度は正確には異なった意味であるので以下でも区別して用いる.

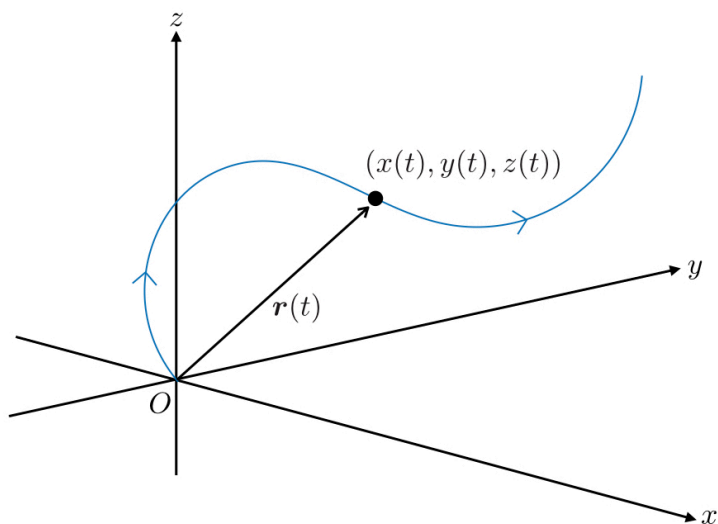


図8 軌道

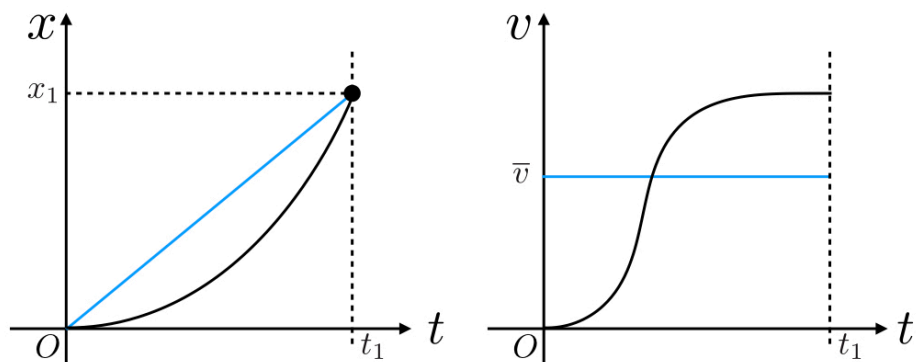


図9 実際の軌道（黒）と平均の速さで運動したときの軌道（青）。

まずは50m走の簡単な例から始める。もしある人の50m走のタイムが5.47s (s = 秒) だったとしよう。この人の速さを「距離 ÷ 要した時間」で

$$\bar{v} = \frac{50\text{m}}{5.47\text{s}} = 9.14\text{m/s}$$

と定める。この人は1sの間に約9m走ることができると解釈できる。この人の100m走のタイム T は素朴に考えると $T = 100/9.14 = 10.94\text{s}$ (50m走のタイムの2倍) と予想される。しかしながら実際にはこれよりも早くなるのが普通である。上の速さの求め方では最初の加速から最高速に達するまでの情報が欠落している。実際の走者は最初から $\bar{v} = 9.14\text{m/s}$ の速さなのではなく、スタートで静止している状態から徐々に加速し最高速に達するのである。抽象的に言えば、速さも時間の関数 $v(t)$ として刻々と値が変化する量なのである。このような

速さの変化を均した値が \bar{v} であると解釈する方が正しい. そのため距離を D , 要した時間を T としたときに

$$\bar{v} := \frac{D}{T}, \tag{5.2}$$

を**平均の速さ**という. これに対して時間の関数 $v(t)$ としての速さを時刻 t での**瞬間の速さ**あるいは単に**速さ** (speed) という.

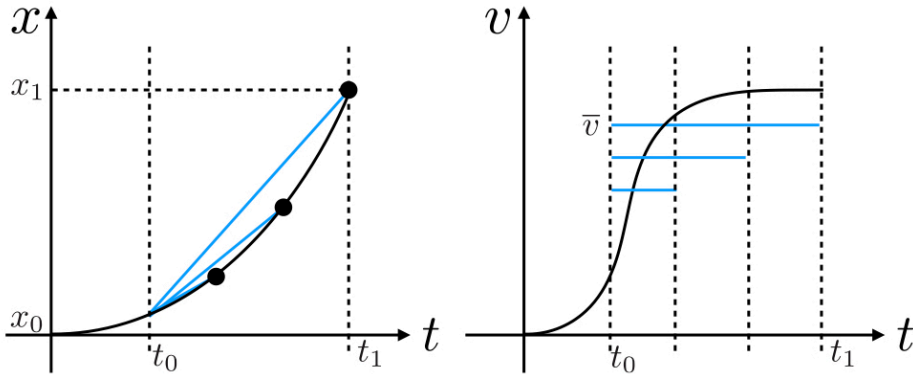


図 10 t_1 を t_0 に近づけたときの平均の速さの変化. 区間が狭まると瞬間の速さに近づいていく.

物体の軌道が直線の場合, それに沿って x 座標を導入する. そして測りはじめの時刻と位置を t_0, x_0 , 測り終わりを t_1, x_1 としたときの平均の速さは

$$\bar{v} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}, \tag{5.3}$$

となる. 軌道は時間の関数なので $x = x(t)$ と表わせて, $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$ という関係が得られる. 要した時間が T のとき $t_1 = t_0 + T$ なので

$$\bar{v} = \frac{x(t_0 + T) - x(t_0)}{T}, \tag{5.4}$$

とも書ける.

もし T が限りなく 0 に近い短い時間とする. すると \bar{v} は平均の速さには違いないが, 限りなく時刻 t_0 での「瞬間の速さ」 $v(t_0)$ に近づいていくと考えられる. 数学では上記のことを

$$v(t_0) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + T) - x(t_0)}{T}, \tag{5.5}$$

と表記する. 右辺は時間 T の間の物体の平均の速さであり, T を 0 に近づけると瞬間の速さ $v(t_0)$ に限りなく近くことを意味している. \lim は極限を表す記号で大雑把に言って次のような性質を持つ:

$$\lim_{T \rightarrow 0} T = 0, \quad \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} = +\infty. \tag{5.6}$$

簡単な例で速さ $v(t)$ を求めてみよう. 位置が時間に比例する場合 $x(t) = at$. このとき定義より $v(t) = \lim_{T \rightarrow 0} [a(t+T) - at]/T = \lim_{T \rightarrow 0} a$. これは T によらないから $v(t) = a$ となる. よって位置が時間に比例する場合は速さは比例係数に等しく一定となる.

一般に速さが一定と仮定するとそれは移動距離割る所要時間で求まり, 平均の速さと瞬間の速さが一致する. しかしながら速さが常に一定という仮定は強すぎる. 速さが時刻によって変わらないということはある軌道の区間 $[x_0, x_1]$ で速さが求まってしまえば, 軌道全体での速さが求まったことになる.

私たちが知りたいのは, もっと複雑な軌道で速さが一定でない場合にそれぞれの時刻一点での速さなのである. そこで次の節で「微分」という演算を導入して, 瞬間の速さを定式化しよう.

PROBLEM

PROBLEM1. 地球が太陽のまわりを回る速さを求めよ. ただし地球は太陽を中心にして半径 $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ の円軌道を描き, 一定の速さで運動しているとする.

SOLUTION. 一定なので平均の速さと等しい. よって距離割る時間で,

$$v = \frac{2\pi * 1.5 \times 10^8 \text{ km}}{1 \text{ year}} = 2.988 \times 10^4 \text{ m/s},$$

と求まる. 実際の地球の公転の間の平均の速さは $2.978 \times 10^4 \text{ m/s}$ なので非常に近い値となっている.

§6. 極限

微分を導入するために, また函数のふるまいを調べるために極限とよばれる操作を導入しよう. ここでの議論は1変数函数 $x = f(t)$ のみに限る.

簡単な例から始める. $x = 1/t$ はほとんどの点で値が定義されている. t が2に限りなく近づくと x は $1/2$ に限りなく近づいていく. t を限りなく大きくすると x は限りなく0へ近づいていく. このように変数がある値 t_0 に近づけたときに函数がある値 a に限りなく近づくとを収束する (converge) といい

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = a, \quad (6.1)$$

とかく. 特に変数を限りなく大きくするときは ∞ という記号を用いて

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = a, \quad (6.2)$$

とかく. 負の方でも同様であり

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = a, \quad (6.3)$$

とかく.

他方で三角函数 $x = \sin t$, $x = \cos t$ などで t を大きくしても x は -1 と $+1$ の間を変動し続け, 決して特定の値に収束しない. このように値が1つに定まらない場合は振動するという (特に記号はない).

多項式 $x = t^n$ ($n \in \mathbb{N}$) や指数関数 $x = b^t$, ($b > 0$) などで t を限りなく大きくしていくと x は限りなく大きい値になり特定の値に収束しない. このように限りなく (絶対値が) 大きくなり続ける場合は**発散する** (diverge) といひ

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = -\infty, \quad (6.4)$$

と表記する. ∞ は便宜的な記号であり, 数字ではないことに注意せよ. つまり発散している場合も定まった値は存在しない.

最初の例 $x = 1/t$ に戻ろう. t を 0 に近づけると, 正の側から近づけると x は $+\infty$ へ, 負の側から近づけると $-\infty$ に発散する. 函数によっては近づき方によって極限が変わってくる. そこで正の側から近づけると $t \rightarrow t_0 + 0$ (右極限) とかき, 負の側から近づけると $t \rightarrow t_0 - 0$ (左極限) とかく. もしこの 2 つの極限が収束しかつ $t = t_0$ での値と一致するとき

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} f(t) = f(t_0) \quad (6.5)$$

函数 $x = f(t)$ は $t = t_0$ において**連続** (continuous) という. たいていの初等函数は全ての点において連続である. しかし $x = 1/t$ は $t = 0$ において発散しているので不連続である ($t \neq 0$ では連続). もっと簡単な不連続函数の例は階段函数

$$x = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases},$$

である. $\lim_{t \rightarrow +0} x = 1$ かつ $\lim_{t \rightarrow -0} x = 0$ なので $t = 0$ において収束するが両者が一致せず不連続である.

2 つの函数 f, g が両方とも $t = t_0$ において連続ならば以下の函数も $t = t_0$ において連続である:

$$f(t) + g(t), \quad f(t)g(t), \quad \frac{f(t)}{g(t)} \quad (6.6)$$

ただし 3 つ目に関しては $g(t_0) \neq 0$ でなければならない.

以下にいくつか極限の公式をあげておく:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^n &= +\infty, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t^n} &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

ただし n は正の整数. 三角函数に関しては

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \quad (6.8)$$

という重要な極限值がある (証明略).

最後に指数函数に関しても重要な極限

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e, \quad (6.9)$$

が成り立つ。ここで e は **Napier 数** と呼ばれる無理数で

$$e = 2.718281828 \dots, \quad (6.10)$$

である。本稿では (6.9) を Napier 数の定義とする。

上では極限操作を「限りなく近づく」という言葉でかなり曖昧に定めた。しかし近づき方には左右の任意性があり、多変数函数の場合にこの定義は破綻してしまう。また限りなくということが数学的に表現される必要がある。

ある函数 $x = f(t)$ において t を有限の値 t_0 に近づけたときある有限の値 a , ($a \in \mathbb{R}$) に収束することを次のように定義する：

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t.} \\ |f(t) - a| < \epsilon, \quad \text{for } 0 < |t - t_0| < \delta. \end{aligned} \quad (6.11)$$

このとき $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = a$ とかき函数 f は $t \rightarrow t_0$ で a に収束するという。この定義を慣習的に使われる文字からとって ϵ - δ 論法 ((ϵ, δ) -definition of limit) という。定義を補足すると、任意の ϵ とは「どんなに小さい任意の ϵ をとってきてても」と解釈する。その小さい ϵ に対し必ずある数値 δ が存在して s.t. 以下を成立させる。s.t. 以下は $f(t)$ と a の差が ϵ 未満となるように t を t_0 へ近づけられることを示している。 δ は ϵ と a によって決まる。

ϵ - δ 論法を用いて連続を再定義する。函数 $x = f(t)$ が $t = t_0$ で連続であるとは

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t.} \\ |f(t) - f(t_0)| < \epsilon, \quad \text{for } 0 < |t - t_0| < \delta. \end{aligned} \quad (6.12)$$

$0 < |t - t_0| < \delta$ と絶対値表記されているので左極限と右極限がまとめられており、近づき方の任意性が排除されている。

連続函数の性質を示しておこう。まず函数 $x = f(t)$ について

$$f \text{ が } t = t_0 \text{ において連続かつ } f(t_0) > 0 \Rightarrow t_0 \text{ の十分小さな近傍で } f(t) > 0. \quad (6.13)$$

ここで t_0 の近傍 (neighborhood) とは t_0 を含むような开区間のことである。この定理はどんなに $f(t_0)$ が 0 に近くてもその間に「隙間」が生じることを述べている。証明するために $t = t_0$ の両側に f は零点をもち $f(t_1) = f(t_2) = 0$ とする (もし零点を持たない場合は自明に $f(t) > 0$ である)。 $t = t_0$ において連続なので、

$$|f(t) - f(t_0)| < \epsilon, \quad \text{for } 0 < |t - t_0| < \delta,$$

が成り立つような δ が任意の ϵ に対して存在する。絶対値を外せば、

$$f(t_0) - \epsilon < f(t) < f(t_0) + \epsilon, \quad \text{for } t_0 - \delta < t < t_0 + \delta.$$

そこで $\epsilon = f(t_0)/2$ にとって⁶⁾、それに応じた δ をとれば

$$f(t) > f(t_0) - \frac{f(t_0)}{2} = \frac{f(t_0)}{2} > 0,$$

⁶⁾ ここでは $\epsilon = f(t_0)/2$ に選んだが、 $0 < \alpha \leq 1$ として $\epsilon = \alpha f(t_0)$ の形であればなんでも良い。

が开区間 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ において成り立つ。この开区間は t_0 の近傍だから所期の結果を得た。同様に $f(t_0) < 0$ に対しても十分小さな近傍で $f(t) < 0$ が成り立つ \square 。

次に**中間値の定理** (intermediate value theorem) を示そう：函数 $x = f(t)$ が閉区間 $[t_0, t_1]$ の全ての点において連続かつ $f(t_0) \neq f(t_1)$ のとき

$$\forall \xi \in (f(t_0), f(t_1)), \exists \tau \in (t_0, t_1), \text{ s.t. } f(\tau) = \xi. \quad (6.14)$$

开区間で定義された連続函数は必ずその区間の端の間の値を取らなければならないことを主張している。簡単に証明しておく。 $f(t_0) < f(t_1)$ としても一般性を失わない。

$$g(t) := f(t) - \xi,$$

を定義すると g も $[t_0, t_1]$ で連続函数である。 $g(t)$ が負の値となるような t の集合

$$A = \{t \in [t_0, t_1] \mid g(t) < 0\},$$

を考える。 $f(t_0) < \xi < f(t_1)$ なので $g(t_0) < 0$ であり $t_0 \in A$ がわかる。ゆえに $A \neq \emptyset$ 。同様に $g(t_1) > 0$ であり任意の $t \in A$ に対して $t \leq t_1$ である。よって集合 A は上に有界である。⁷⁾ 実数 \mathbb{R} の連続性より上に有界な集合には上限

$$\tau := \sup A,$$

が存在する。⁸⁾ 上限の定義より任意の $t \in A$ に対し $t \leq \tau$ 。 $g(t_0) < 0$ だから定理 (6.13) より十分小さな δ が存在して $[t_0, t_0 + \delta)$ において $g(t) < 0$ 。よってこの区間は A に包含されていて $t \leq \tau$ が成り立つ。 $\delta > 0$ なので $t_0 < t_0 + \delta \leq \tau$ である。同様の議論で $g(t_1) > 0$ ということから $\tau < t_1$ が導かれる。

$g(\tau) < 0$ と仮定すると定理 (6.13) よりある小さな $\delta > 0$ が存在して $g(\tau + \delta) < 0$ 。ゆえに $\tau + \delta \in A$ だが、これは τ が A の上限であることに反する。他方で $g(\tau) > 0$ と仮定すると同様に定理 (6.13) よりある小さな $\delta > 0$ が存在して $g(\tau - \delta) > 0$ 。これは τ が上限の最小性 (任意の $t \in A$ に対し $t \leq M$ を満たす M の最小値) に反する。以上から $g(\tau) = 0$ でなければならない、すなわち $f(\tau) = \xi$ がしたがう \square 。

PROBLEM

PROBLEM1. 右極限と左極限を ϵ - δ 論法を用いて定義せよ。

SOLUTION. 右極限：

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } |f(t) - a| < \epsilon, \text{ for } 0 < t - t_0 < \delta.$$

⁷⁾ 集合 $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界とは、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して、任意の $a \in A$ に対して $a \leq M$ となること：

$$\exists M \in \mathbb{R}, \text{ s.t. } \forall a \in A, a \leq M.$$

⁸⁾ ある上に有界な集合 A の上限 $\sup A$ とは任意の $a \in A$ に対し $a \leq M$ となる M の最小値のことである。 $\sup A$ は A に含まれるとは限らない。たとえば开区間 (a, b) なら上限は b だがこれは开区間に含まれない。

左極限：

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } |f(t) - a| < \epsilon, \text{ for } -\delta < t - t_0 < 0.$$

§ 7. 微分法

微分とは字義を解釈すれば微々たる数どうしの割り算（分数）のこととなる．微分演算によって未知の関数の形状を調べたり，微分の情報から元の関数を推測することができる．

関数 $x = f(t)$ の $t = t_0$ において

$$f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (7.1)$$

の極限值が存在するとき，関数 f は $t = t_0$ において**微分可能** (differentiable) という．またその極限值 $f'(t_0)$ を $t = t_0$ での**微分係数**，あるいは単に**微分** (differentiation) という．

各点 t での微分係数を集めたもの $f'(t)$ を f の**導関数** (derivative) という．物理学では時間 t による微分をダッシュ $'$ ではなくドット $\dot{}$ を使うのが慣例になっている．本稿でも時間による導関数は $\dot{f}(t)$ などと表記する．

関数の連続性と微分可能性について次が成り立つ：

$$f \text{ が } t = t_0 \text{ において微分可能} \Rightarrow f \text{ が } t = t_0 \text{ において連続.} \quad (7.2)$$

証明は非常にシンプルで

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) - f(t_0)) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \cdot (t - t_0) \\ &= f'(t_0) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

2 つ目の等号で f が微分可能であることを用いた．したがって $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$ が導かれる □.

連続であっても微分可能とは限らない．たとえば $x = |t|$ は連続関数だが $t = 0$ において，

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{|t| - |0|}{t - 0} = +1, \quad \lim_{t \rightarrow -0} \frac{|t| - |0|}{t - 0} = -1,$$

なので左極限と右極限が一致しないので極限值は存在せず微分可能ではない．

定義域全体で微分可能な任意の関数 $x = f(t)$ を考えよう．この関数上で適当に 2 点 $(t_0, x_0), (t_1, x_1)$ をとってこの 2 点を通る直線をつくる．この直線の式は，

$$x - x_0 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} (t - t_0) = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} (t - t_0)$$

とかける．ここで $t_1 \rightarrow t_0$ という極限を考えれば， x の前の係数は微分係数の定義に一致して，

$$x - x_0 = f'(t_0)(t - t_0) \quad (7.3)$$

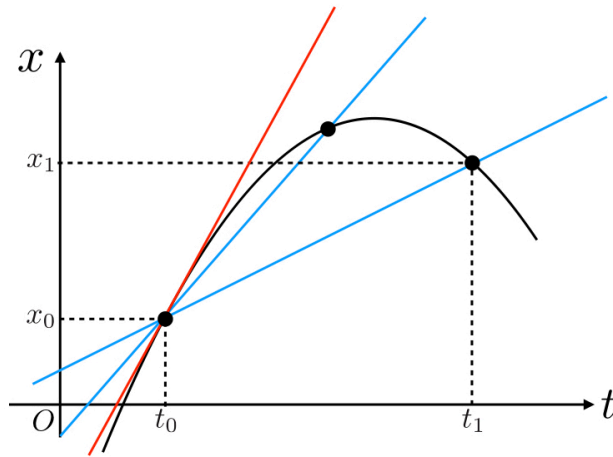


図 11 2 点を結ぶ直線 (青) と $t = t_0$ における接線 (赤).

である. こうして得られた直線の式を $x = f(t)$ の $t = t_0$ における**接線** (tangent) といい, 微分係数 $f'(t_0)$ はこの接線の傾きに等しい.

微分の定義で $t - t_0 =: h$ とおいて $h \rightarrow 0$ の極限に置き換えた方が計算がしやすくなる:

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \tag{7.4}$$

微分演算には次の性質がある: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ のとき**線型性**,

$$(\alpha f(t) + \beta g(t))' = \alpha f'(t) + \beta g'(t). \tag{7.5}$$

2 つの函数 f, g の積の函数の微分については **Leibniz 則**,

$$(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t), \tag{7.6}$$

が成り立つ. 線型性は定義から明らかである. Leibniz 則については微分の定義より

$$(f(t)g(t))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)g(t+h) - f(t)g(t)}{h}.$$

分子に $f(t)g(t+h) - f(t)g(t+h)$ を挿入すれば,

$$(f(t)g(t))' = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(t+h) - f(t)}{h} g(t+h) + f(t) \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \right],$$

となり Leibniz 則の右辺がしたがう □. Leibniz 則を一般化して N 個の函数たち $f_1(t), \dots, f_N(t)$ の積の函数 $F(t) = \prod_{i=1}^N f_i(t)$ の微分は,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{df_i}{dt} \cdot \frac{1}{f_i(t)} \prod_{k=1}^N f_k(t) \\ &= \frac{df_1}{dt} \cdot f_2(t) \cdots f_N(t) + \frac{df_2}{dt} \cdot f_1(t) \cdots f_N(t) + \cdots + \frac{df_N}{dt} \cdot f_1(t) \cdots f_{N-1}(t). \end{aligned}$$

微分の別の表記を導入する。微分は接線の傾きに等しい。直線の傾きは引数の変化に対する函数値の変化率である。接線の場合は限りなく近い2点間での変化率である。そこで $x = f(t)$ において引数の（無限小の）変化を dt 、函数値の変化を dx として

$$(\text{接線の傾き}) = \frac{dx}{dt}, \quad (7.7)$$

という表記を導入しよう。つまり導函数は $f'(t) = dx/dt$ とかける。変数がたくさん登場する場合にはどの変数で微分しているかが明らかでないこちらの記法が好まれる。またこの捉え方をすると、微小変化 dt に対する x の変化分を近似的に $dx = f'(t)dt$ で求められる。この近似は $dt \rightarrow 0$ で厳密となる。

いくつかの具体的な函数に対して微分の計算をしよう。まず一次函数 $x = at + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) の微分は定義から直ちに、

$$(at + b)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t+h) + b - (at + b)}{h} = a.$$

次に $t = t^n$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$) の場合は二項定理を用いて、

$$\begin{aligned} (t^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^n - t^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t^n + {}_n C_1 t^{n-1} h + {}_n C_2 t^{n-2} h^2 + \dots + h^n - t^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2}h + \dots + h^{n-1}) \\ &= nt^{n-1}. \end{aligned}$$

n を整数全体に拡張するには $t^n \cdot t^{-n} = 1$ の両辺を微分すれば Leibniz 則より

$$nt^{n-1} \cdot t^{-n} + t^n(t^{-n})' = 0$$

これから $(t^{-n})' = -nt^{-n-1}$ がわかる。したがって $(t^n)' = nt^{n-1}$ は全ての整数 n で成立する。

三角函数⁹⁾の微分をみていこう。まず $x = \sin t$ の導函数は和積の公式を使って、

$$\begin{aligned} (\sin t)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(t+h) - \sin t}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(t + \frac{h}{2}) \sin(\frac{h}{2})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(t + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}. \end{aligned}$$

ここで次のよく知られた公式 $\lim_{t \rightarrow 0} (\sin t/t) = 1$ を用いると、

$$(\sin t)' = \cos t. \quad (7.8)$$

⁹⁾ 三角函数については Appendix 参照

同様にして, $x = \cos t$ の導関数は,

$$(\cos t)' = -\sin t \quad (7.9)$$

となる.

対数関数 $x = \ln t$ の微分は $t > 0$ においてのみ可能で,

$$\begin{aligned} (\ln t)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(t+h) - \ln t}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{t+h}{t} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{t} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{h}{t} \right)^{\frac{t}{h}}, \end{aligned}$$

となるので公式 $e = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t}$ を用いれば,

$$(\ln t)' = \frac{1}{t} \ln e = \frac{1}{t} \quad (7.10)$$

指数関数 $x = a^t$ ($a > 0$) の微分は,

$$\begin{aligned} (a^t)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{t+h} - a^t}{h} \\ &= a^t \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}. \end{aligned}$$

ここで, $a^h - 1 = H$ と置き換えると, $h \rightarrow 0$ のとき $H \rightarrow 0$ であり, $h = \ln(H+1)/\ln a$ だから,

$$(a^t)' = a^t \ln a \cdot \lim_{H \rightarrow 0} \frac{H}{\ln(H+1)},$$

と書き換えられる. さらに公式 $e = \lim_{H \rightarrow 0} (1+H)^{1/H}$ の両辺で \ln をとれば,

$$1 = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\ln(1+H)}{H},$$

だから, これの分母分子を逆にしたものより

$$(a^t)' = a^t \ln a, \quad (7.11)$$

となる. 特に $x = e^t$ の微分は,

$$(e^t)' = e^t \ln e = e^t, \quad (7.12)$$

となって微分しても同じ函数形を保つ.

最後に合成関数 $x = (f \circ g)(t) = f(g(t))$ の t による微分は,

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(t+h)) - f(g(t))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(t+h)) - f(g(t))}{g(t+h) - g(t)} \cdot \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ で (g が連続ならば) $g(t+h) \rightarrow g(t)$ なので結局,

$$(f \circ g)'(t) = \frac{df}{dg}(g(t)) \cdot \frac{dg}{dt}(t) \quad (7.13)$$

つまり分数の計算のように $dg/dg = 1$ を間に挟むことで微分の計算を2つにわけているのである。(7.13)を微分の**鎖法則** (chain rule) という。

合成関数の微分的具体例を見てみよう。 $f(t) = \sin t, g(t) = t^2$ のとき, $(f \circ g)(t) = \sin(t^2)$ であるから微分すると,

$$(f \circ g)'(t) = \frac{d}{dg}(\sin g) \cdot \frac{dg}{dt} = \cos(t^2) \cdot (2t)$$

という結果になる。他の例(物理に度々現れる函数形)を問題に用意した。

PROBLEM

PROBLEM1. 次の函数の導函数を求めよ:

$$x = t^{1/n}.$$

ただし n は 0 でない任意の整数。

SOLUTION. $(t^{1/n})^n = t$ の両辺を t で微分すると合成函数の微分より

$$n(t^{1/n})^{n-1} \cdot (t^{1/n})' = 1$$

よって $(t^{1/n})' = t^{1/n-1}/n$ と求まる。

PROBLEM2. 次の函数の導函数を求めよ:

$$x = t^q.$$

ただし q は任意の有理数。

SOLUTION. 任意の有理数は互いに素な整数 m, n を用いて $q = m/n$ と書ける。 $t^{m/n} = (t^{1/n})^m$ とみて t で微分すると合成函数の微分より

$$(t^q)' = m(t^{1/n})^{m-1} \cdot \frac{1}{n} t^{1/n-1} = \frac{m}{n} t^{m/n-1},$$

よって任意の有理数 q に対して $(t^q)' = qt^{q-1}$ と求まる。

PROBLEM3. 次の函数の導函数を計算せよ:

$$(I) \quad x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \quad (II) \quad x = te^{-t^2}, \quad (III) \quad x = \frac{t^2}{1+e^{-t}}.$$

SOLUTION. (I) $t^{-1/2}$ と $1+t^2$ の合成函数とみれば,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)' = -\frac{1}{2}(t^2+1)^{-3/2} \cdot 2t = \frac{-t}{(t^2+1)^{3/2}}.$$

(II) Leibniz 則を適用し, e^{-t^2} を e^t と $-t^2$ の合成函数とみれば

$$\begin{aligned} (te^{-t^2})' &= (t)'e^{-t^2} + t(e^{-t^2})' \\ &= e^{-t^2} + te^{-t^2} \cdot (-2t) \\ &= (1-2t)e^{-t^2}. \end{aligned}$$

(III) Leibniz 則を適用し, $1/t$ と $1 + e^{-t}$ の合成函数とみれば

$$\begin{aligned} \left(\frac{t^2}{1+e^{-t}} \right)' &= t^2 \cdot \left(\frac{1}{1+e^{-t}} \right)' + \frac{2t}{1+e^{-t}} \\ &= \frac{-t^2 e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} + \frac{2t}{1+e^{-t}} \\ &= \frac{-t(t-2)e^{-t} + 2t}{(1+e^{-t})^2}. \end{aligned}$$

PROBLEM4. 次の函数の導函数を計算せよ:

$$x = \ln \left[\tan(t^2 + 1) \right]$$

SOLUTION. $f(t) = \ln t$ と $g(t) = \tan t$ と $h(t) = t^2 + 1$ の合成函数 $(f \circ g \circ h)(t)$ とみれば

$$\begin{aligned} \left(\ln \left[\tan(t^2 + 1) \right] \right)' &= \frac{1}{\tan(t^2 + 1)} \cdot \frac{1}{\cos^2(t^2 + 1)} \cdot 2t \\ &= \frac{4t}{\sin[2(t^2 + 1)]} \end{aligned}$$

§ 8. 速度ベクトル

微分を使って速さを定義しよう. 位置ベクトルは時間の函数であった.

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

時刻 $t = t_0$ のときの位置ベクトル $\mathbf{r}(t_0)$ と時刻 $t = t_1$ での $\mathbf{r}(t_1)$ の差

$$\mathbf{u} := \mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_1) - x(t_0) \\ y(t_1) - y(t_0) \\ z(t_1) - z(t_0) \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

を**変位ベクトル** (displacement) という. 時刻 t_0 から t_1 までの平均の速度ベクトルは

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{t_1 - t_0} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)}{t_1 - t_0},$$

で計算される. これはベクトル量であるが各成分は平均の速さ (5.3) の定義に一致している. $t_1 \rightarrow t_0$ の極限をとって,

$$\mathbf{v}(t_0) := \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)}{t_1 - t_0}, \quad (8.2)$$

を定義する. (8.2) を質点の**速度ベクトル** (velocity) あるいは単に**速度**という. この定義において極限操作は各成分でそれぞれ行われる. たとえば速度ベクトルの x 成分は微分 $v_x = dx/dt$ に等しく時刻 $t = t_0$ での位置の時間変化率を表す. 物理学においては時間微分による微分は使って $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, $v_x = \dot{x}$ などのように表すことが慣習となっている.

たとえば質点が直線軌道 $\mathbf{r} = t\mathbf{a} + \mathbf{b}$ の場合, 微分の公式から $\mathbf{v} = \mathbf{a}$ となり速度は一定となる.

速度ベクトルの大きさ,

$$v(t) := |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}, \quad (8.3)$$

は質点の**速さ** (speed) といい, 速度と区別する. たとえば等速だが曲線軌道を描く場合, 質点の速さは時間によらず一定値だが, 速度ベクトルは刻々と向きを変えていく.

速度ベクトルは位置ベクトルとは性質を異にするベクトルである. 速度 $\mathbf{v}(t)$ は定義からわかるように, 物体の軌道上の位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ で表される点を始点とするベクトルである. また微分の性質から速度ベクトルは物体の軌道に接するような方向を向いている. 軌道の十分微小な区間ではほぼ直線とみなせて, 微小な時間の間だけ物体がその方向に進んでいると解釈できる

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt, \quad (8.4)$$

軌道が曲線の場合はこの見方は近似でしかないので物体は一般にはその速度ベクトルが指す点には進まない.

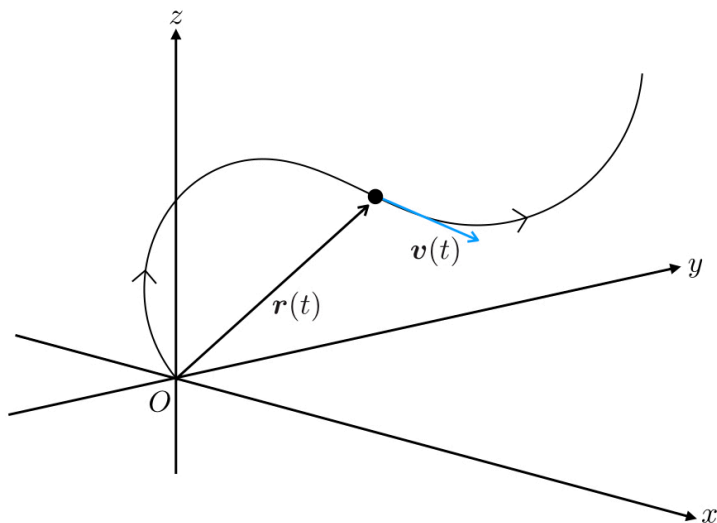


図 12 位置ベクトルと速度ベクトル

速度の微分においては必ず「質点の軌道に沿って」位置ベクトルを $d\mathbf{r}$ だけ微小変位させて定義することに注意しよう.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t). \quad (8.5)$$

大きさは任意だが勝手な向きには微小変位をとることができない. これを特に $\mathbf{r}(t)$ の**方向微分**という.

質点の軌道 $\mathbf{r}(t)$ から速度 $\mathbf{v}(t)$ を得るには微分計算で可能であった. もし逆に速度 $\mathbf{v}(t)$ がわかっているときに軌道 $\mathbf{r}(t)$ はどうやって求めれば良いだろうか. 素朴には微分して $\mathbf{v}(t)$ となるような $\mathbf{r}(t)$ を探せば良いが一般には難しい. また微分の際定数項は全て 0 となるので速

度の情報からは原理的に求めることはできない。微分の逆問題は「積分」とよばれる演算によって解かれる。

PROBLEM

PROBLEM1. 次の軌道の速度を計算せよ：

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a_1 t^2 / 2 + b_1 t + c_1 \\ b_2 t + c_2 \\ b_3 t + c_3 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION. 各成分ごとに微分を計算する。まず x 成分は $v_x(t) = a_1 t + b_1$ 。 y, z 成分は $v_y(t) = b_2, v_z(t) = b_3$ と求まる。したがって速度ベクトルは

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

§9. 微分と極限

この節では極限と微分の両方を使った数学的道具を紹介する。

まず最初に次の定理を事実として認めよう：

f が区間 $[a, b]$ 上で上に有界
 \Rightarrow ある実数 m と M が存在して任意の $t \in [a, b]$ において $m \leq f(t) \leq M$. (9.1)

m と M は区間 $[a, b]$ 内に存在するとは限らない。これは**有界性定理**として知られる。この定理を強めた、

f が区間 $[a, b]$ 上で上に有界 $\Rightarrow f$ は $[a, b]$ 上で最大値と最小値を有する, (9.2)

も成立する (**最大・最小値の定理**)。有界性定理も利用して証明しよう。有界性定理と実数の連続性より任意の $t \in [a, b]$ と集合 $A = \{f(t) | t \in [a, b]\}$ に対して、

$$M = \sup A,$$

を満たす上限 M が存在する。今、 $M = f(t)$ となるような t が $[a, b]$ 上には存在しないと仮定しよう。よって常に $f(t) < M$ であり、 $M - f(t)$ が 0 に等しくなることはない。 f の連続性より、 $F(t) := 1/(M - f(t))$ を定義すると F は $[a, b]$ 上で連続である。有界性定理より F は有界である。一方で M の最小性から任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\tau \in [a, b]$ が存在して、

$$f(\tau) > M - \epsilon.$$

すなわち

$$\frac{1}{M - f(\tau)} > \frac{1}{\epsilon},$$

であり F は有界ではない。したがって F に矛盾が生じるので、背理法により $M = f(t)$ となるような t は $[a, b]$ 上に存在しなければならない。よって f は $[a, b]$ 上に最大値 M を有する。 $-f$ に対して同様の議論を適用することで f が最小値を有することもしたがう□。

1つ注意が必要なことは开区間では成り立たないことである。たとえば函数 $x = t$ は开区間 (a, b) 上に最大値も最小値も持たない。

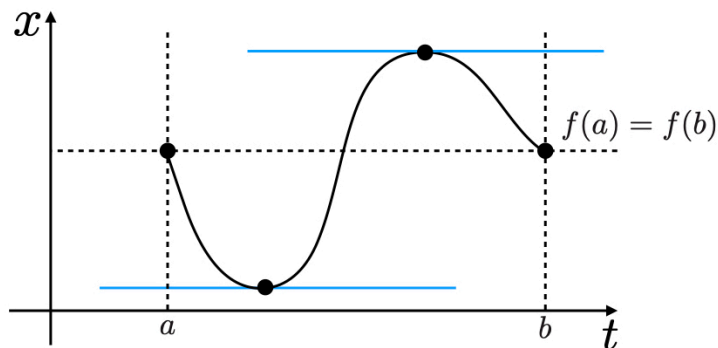


図13 Rolleの定理

最大値、最小値を取る点においては函数の微分の値が0となることが示せる。函数 f が $[a, b]$ 上で連続かつ (a, b) 上で微分可能とする。さらに $f(a) = f(b)$ であるとき、

$$\exists \tau \in (a, b) \quad \text{s.t.} \quad f'(\tau) = 0. \quad (9.3)$$

これは **Rolleの定理**として知られていて、両端が等しい区間のどこかで必ず微分が0となる点が存在することを主張する。まず f が定数函数の場合は任意の点で成立する。 f がそれ以外の場合、最大・最小値の定理より（異なる値の）最大値と最小値を区間内にもつ。 $t = \xi$ で最大値 $f(\xi)$ をとる。 $a < \xi < b$ ならば $f(a) = f(b) < f(\xi)$ 。 $t < \xi$ においては、

$$\frac{f(t) - f(\xi)}{t - \xi} \geq 0,$$

を満たし極限 $t \rightarrow \xi - 0$ をとれば左辺は微分の定義より

$$f'(\xi) \geq 0,$$

同様にして $t > \xi$ においては、

$$\frac{f(t) - f(\xi)}{t - \xi} \leq 0,$$

を満たし極限 $t \rightarrow \xi + 0$ をとれば左辺は微分の定義より

$$f'(\xi) \leq 0,$$

となる。以上のことから $f'(\xi) = 0$ でなければならない。 $a < \xi < b$ ではない場合（つまり両端の点で最大値をとる場合）、最小値となる点 $a < \eta < b$ を考えて同様の議論をすれば $f'(\eta) = 0$ が導かれる□。

両端の値が等しくない $f(a) \neq f(b)$ の場合にも定理を拡張できる. 2つ函数 f, g は区間 $[a, b]$ 上で連続かつ (a, b) 上で微分可能とする. また任意の $t \in (a, b)$ で $g'(t) \neq 0$ とする. このとき,

$$\exists \tau \in (a, b) \quad \text{s.t.} \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)}. \quad (9.4)$$

これは **Cauchy の平均値の定理** として知られる. 証明のために函数

$$F(t) := f(t) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(t),$$

を定義すると, F も $[a, b]$ 上で連続かつ (a, b) 上で微分可能, さらに $F(b) = F(a)$ を満たす. したがって Rolle の定理により

$$\exists \tau \in (a, b) \quad \text{s.t.} \quad F'(\tau) = 0.$$

これはとりも直さず

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)} \quad \square.$$

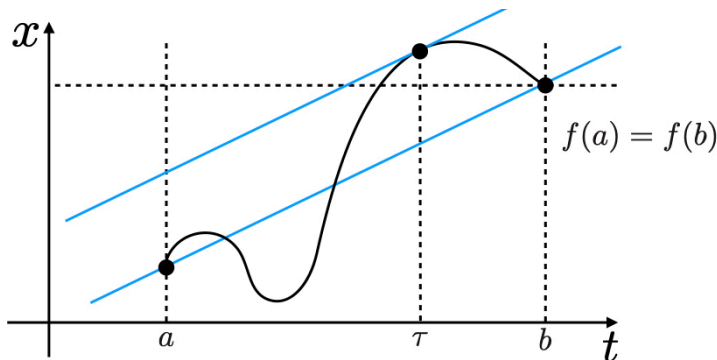


図 14 Lagrange の平均値の定理

Cauchy の平均値の定理の特別な場合として $g(t) = t$ の場合は f が $[a, b]$ 上で連続かつ (a, b) 上で微分可能ならば

$$\exists \tau \in (a, b) \quad \text{s.t.} \quad f'(\tau) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (9.5)$$

が成立する. こちらは **Lagrange の平均値の定理** として知られ, 両端を結んでできる直線と平行となるような f の接線が区間内に存在することを主張する. また $f(b) = f(a)$ とすれば Rolle の定理がしたがう.

最後に**不定形** (indeterminate form) の極限について議論しよう. 不定形とは $f(t) = g(t) = 0$ のとき, あるいは $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \pm\infty$ かつ $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = \pm\infty$ のときの極限

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)},$$

のことである。要するに極限での函数値が $0/0$ や ∞/∞ のような形のことを指す。不定形はそのままでは収束性を判断することはできない。

不定形の極限については次の **l'Hospital の定理**が有用である： $t = t_0$ で微分可能な函数 f, g に対し、 $f(t_0) = g(t_0) = 0$ かつ

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

の極限值が存在するとき

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f'(t)}{g'(t)}. \quad (9.6)$$

大雑把に証明しておくとして、

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)},$$

と変形して、 $t < t_0$ においては Cauchy の平均値の定理により

$$\exists \tau \in (t, t_0) \quad \text{s.t.} \quad \frac{f(t) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)} = \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)}.$$

$t > t_0$ においても同様の式が成立。 $t \rightarrow t_0$ とすると $\tau \rightarrow t_0$ なので

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

となり示された □。

t_0 は $\pm\infty$ に置き換えても l'Hospital の定理は同様に成り立つ。 $t = 1/s$ とすると

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(1/s)}{g(1/s)}.$$

右辺に l'Hospital の定理を適用して

$$(\text{r.h.s.}) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f'(1/s)(-1/s^2)}{g'(1/s)(-1/s^2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f'(1/s)}{g'(1/s)}.$$

したがって

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

l'Hospital の定理はさらに $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \pm\infty$ かつ $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = \pm\infty$ の場合にも拡張できる（証明は省略する）。この場合も t_0 は $\pm\infty$ に置き換えても良い。

例として $f(t) = (1 - \cos t)/t^2$ の $t \rightarrow 0$ の極限を求めよう。これは $0/0$ の不定形であるが l'Hospital の定理により

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2},$$

とわかる。

l'Hospital の定理を 1 回適用しただけではわからない場合でも複数回適用することで極限値を求められる場合もある。函数 $f(t) = t^2/e^t$ の $t \rightarrow \infty$ の極限は ∞/∞ の不定形である。l'Hospital の定理により

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{e^t},$$

となって依然 ∞/∞ の不定形だが、もう一度 l'Hospital の定理を適用すれば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{e^t} = 0,$$

がわかる。指数函数は何回微分しても e^t のままだが多項式は有限回の微分で定数函数となる。したがって任意の正整数 n に対し

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^t} = 0,$$

となる。これは指数函数の増大のスピードが多項式函数より遥かに速いことを意味している。このように l'Hospital の定理は 2 つの函数の収束の速さを比較するのに用いることもできる。

§ 10. 積分

微分によりある函数 $f(t)$ から導函数 $f'(t)$ を得ることができる。では逆にある函数 $f(t)$ が与えられたときに、微分して $f(t)$ に等しくなるような函数 $F(t)$ を求めることを考えたい。この微分の逆の演算を**積分** (integral) という。

ここでは微分の逆として簡単に定義しておくことにしてまずは具体的な計算をしていこう。函数 $f(t)$ を t で積分することを、

$$\int dt f(t),$$

とかく。¹⁰⁾ 積分される函数 f を被積分函数といい、積分結果得られる函数を**原始函数**という。まず定数函数 $x = a$ を積分してみよう:

$$\int dt a.$$

$x = a$ は微分を思い出せばちょうど $x = at + b$ の導函数であるから上で積分を実行した結果は、

$$\int dt a = at + b, \quad (10.1)$$

となる。ここで b は 1 や 100 など実数であれば何でも良い。なぜなら定数の微分は 0 なので、微分により b の情報は失われているからである。この b を**積分定数**といい慣例的に C とかく。積分定数はどの函数を積分しても現れる。この不定性をこめてこの積分を**不定積分**という。だから微分と積分はかけ算と割り算のような全く逆の演算というわけではない。

¹⁰⁾ $\int f(t)dt$ とかいてもよいが本稿ではこの表記は採用しない。

$x = t^n$ の不定積分は,

$$\int dt t^n = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C. \quad (10.2)$$

ただし $n \neq -1$. 不定積分が正しいか確かめるには右辺を微分してみると良い. $n = -1$ のときには右辺の分母が 0 になってしまい成り立たない. しかし対数関数 $x = \log t$ の微分を思い出せば,

$$\int dt \frac{1}{t} = \ln |t| + C, \quad (10.3)$$

がわかる. ただし対数関数は $t > 0$ でしか定義されないことに注意.

三角関数の不定積分すると,

$$\int dt \sin t = -\cos t + C, \quad \int dt \cos t = \sin t + C. \quad (10.4)$$

微分のときとは負号のつき方が逆なことに注意せよ.

次に指数関数を不定積分してみよう.

$$\int dt a^t = \frac{1}{\ln a} a^t + C. \quad (10.5)$$

ただし $a > 0, a \neq 1$. 特に $a = e$ のときは,

$$\int dt e^t = e^t + C. \quad (10.6)$$

ところが対数関数を積分しようとするとき原始関数を容易には見つけられない. 実際, 対数関数 $\ln t$ の積分は,

$$\int dt \ln t = t(\ln t - 1) + C, \quad (10.7)$$

である. この不定積分を簡単に求めるためには**部分積分** (integral by parts) を使う. 積の関数の微分は,

$$\frac{d(f \cdot g)}{dt} = \frac{df}{dt} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dt},$$

であった. これを移項して両辺不定積分すると,

$$\int dt f \cdot \frac{dg}{dt} = \int dt \left(\frac{d(f \cdot g)}{dt} - \frac{df}{dt} \cdot g \right).$$

右辺の被積分関数 (積分されている関数) の第 1 項は $f \cdot g$ を微分して積分しているので,

$$\int dt \frac{d(f \cdot g)}{dt} = f \cdot g + C,$$

となる. したがって,

$$\int dt f \cdot \frac{dg}{dt} = f \cdot g - \int dt \frac{df}{dt} \cdot g, \quad (10.8)$$

が得られる.¹¹⁾ これを部分積分という. $x = \ln t$ を $x = \ln t \cdot 1$ とみると部分積分が使えて,

$$\begin{aligned}\int dt \ln t \cdot 1 &= \ln t \cdot t - \int dt \frac{1}{t} \cdot t \\ &= t \ln t - t + C.\end{aligned}$$

よって対数関数の積分が得られた.

以上からわかるように積分は微分ほど簡単ではない. 原始関数が容易に見つからない場合の方が多く, そもそも原始関数が存在しないならば積分は不可能である.

次節では積分演算のグラフ上での意味について議論する.

PROBLEM

PROBLEM1. 次の関数の不定積分を求めよ:

$$(I) \quad x = 2^t, \quad (II) \quad x = \frac{1}{t^2 - 1}, \quad (III) \quad x = \tan^2 t.$$

SOLUTION. (I) 指数関数の積分公式 (10.5) より

$$\int dt 2^t = \frac{1}{\ln 2} 2^t + C.$$

(II) 部分分数分解により,

$$\int dt \frac{1}{t^2 - 1} = \int dt \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right).$$

したがって対数関数の積分公式 (10.3) を適用できて,

$$\int dt \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C.$$

(III) 三角関数の公式 $\tan^2 t + 1 = 1/\cos^2 t$ を用いて,

$$\int dt \tan^2 t = \int dt \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right).$$

第1項の原始関数は $\tan t$ なので

$$\int dt \tan^2 t = \tan t - t + C,$$

と求まる.

PROBLEM2. 次の関数の不定積分を求めよ:

$$(I) \quad x = \frac{\ln t}{\sqrt{t}}, \quad (II) \quad x = t^2 e^t, \quad (III) \quad x = e^t \sin t.$$

SOLUTION. (I) $1/\sqrt{t}$ と $\ln t$ に関する部分積分により

$$\int dt \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \ln t - \int dt \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

¹¹⁾ 第1項の積分定数は第2項の不定積分で現れる積分定数に押し込められている, としてここでは省略している.

右辺第 2 項の積分は容易に実行できて、

$$\int dt \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \ln t - 4\sqrt{t} + C.$$

(II) t^2 と e^t に関して部分積分を実行すると、

$$\int dt t^2 e^t = t^2 e^t - \int dt 2t e^t.$$

再び右辺第 2 項で $2t$ と e^t に関して部分積分を行えば、

$$\int dt t^2 e^t = (t^2 - 2t + 2)e^t + C.$$

(III) e^t と $\sin t$ に関して部分積分を実行すると

$$\int dt e^t \sin t = e^t \sin t - \int dt e^t \cos t,$$

となる（ここでは $(e^t)' \cdot \sin t$ で計算したが $e^t \cdot (-\cos t)'$ としても同様の計算が可能）。再び右辺第 2 項で $2t$ と e^t に関して部分積分を行えば、

$$\int dt e^t \sin t = e^t \sin t - e^t \cos t - \int dt e^t \sin t + C.$$

右辺第 3 項は左辺と同じ積分になっていることに気づけば、これを移項して

$$\int dt e^t \sin t = \frac{1}{2} (e^t \sin t - e^t \cos t) + C,$$

となる。

§ 11. 定積分

この節では積分のグラフ上での意味を考えよう。微分はグラフの接線の傾きを表していた。微分の逆演算である積分はどのような意味があるだろうか。

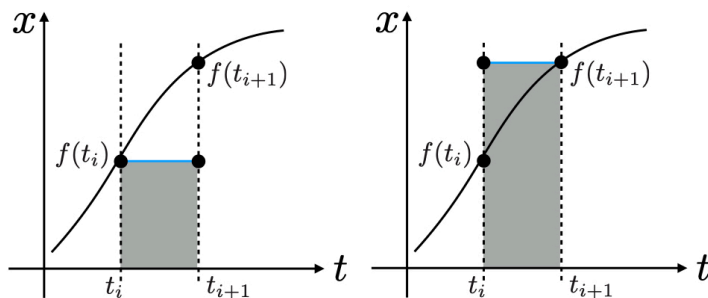


図 15 区間 $[t_i, t_{i+1}]$ における長方形の構成。(左) グラフより下側なるように作る (右) グラフより上側なるように作る。

そのためには積分の定義を深めておこう。積分を面積によって定式化する。連続な関数 $x = f(t)$ を区間 $[a, b]$ の間で N 個の区間に分割する。¹²⁾ そこから 2 通りの方法で長方形を作る。分割した区間 $[t_i, t_{i+1}]$ において $f(t_i)$ と $f(t_{i+1})$ の 2 点あって (i) その小さい方を上底とする, (ii) その大きい方を上底とする, の 2 通りである。そうして面積 $(t_{i+1} - t_i) \min(f(t_i), f(t_{i+1}))$ の長方形と $(t_{i+1} - t_i) \max(f(t_i), f(t_{i+1}))$ の長方形ができる。関数 f と t 軸, $t = a, t = b$ で囲まれる領域の面積 S はこの 2 種類の長方形の和によって,

$$\sum_{i=0}^{N-1} h \cdot \min(f(t_i), f(t_{i+1})) \leq S \leq \sum_{i=0}^{N-1} h \cdot \max(f(t_i), f(t_{i+1})),$$

で挟まれている。ここで h は長方形の幅 $(T - t_0)/N$ であり $t_i = a + ih$ である。また $t_N = b$ である。分割の数を無限に多くして $N \rightarrow \infty$ としたとき, 分割の幅 h は 0 に近づく。これにともなって近似の精度が無限に良くなって 2 つの長方形の和が一致することがある。このとき積分確定といふ関数 $x = f(t)$ の積分値が定義される (はさみうちの原理)。実際には物理学に登場するほとんどの関数は積分確定となる。そうしてこの極限によって積分演算を,

$$\int_a^b dt f(t) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} h \cdot f(t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} \cdot f\left(a + i \frac{b-a}{N}\right), \quad (11.1)$$

で定義する。積分記号 \int の下付き添え字は積分区間の開始位置を表し, 上付き添え字は終了位置を表す。こうしてみると和の記号 $\sum_{n=0}^N h$ と積分記号 $\int_a^b dt$ が対応していることがわかる。右辺のような極限で面積を求めるやり方を **区分求積法** という。以上から関数 f の積分がそのグラフと t 軸で囲まれる領域の面積で定義された。これを区間 $[a, b]$ 上での f の **定積分** という。

定積分の基本的な性質を述べておこう。上記では区間 $[a, b]$ 上で必ず $a \leq b$ となるように設定したが, 対称性から逆にしても良い。その際, 積分結果は

$$\int_b^a dt f(t) = - \int_a^b dt f(t), \quad (11.2)$$

を満たす。積分が分割された長方形の面積の和で定義されているので, 区間 $[a, b]$ を 2 つの区間 $[a, c]$ と $[a, c]$ に分けて,

$$\int_a^b dt f(t) = \int_a^c dt f(t) + \int_c^b dt f(t), \quad (11.3)$$

という和に分割可能である。また線型性も有する, f, g を区間 $[a, b]$ 上で連続な関数, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とすると,

$$\int_a^b dt (\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \int_a^b dt f(t) + \beta \int_a^b dt g(t). \quad (11.4)$$

¹²⁾ 数直線上の区間はこのように表記する。たとえば $a \leq t \leq b$ を $[a, b]$ とかき特に**閉区間**という。また $a < t < b$ は (a, b) とかき特に**開区間**という。また片方の不等号が等号 $=$ を含む開区間を半開区間という。

では次にこの面積を求めるための演算である積分が微分の逆であることを示そう。区間 $[a, b]$ で函数 f が連続ならば最小値 m と最大値 M が存在する。 $x = m$ と t 軸で囲まれる長方形の面積はグラフで囲まれた領域の面積より小さい。また $x = M$ と軸で囲まれる長方形の面積はグラフで囲まれた領域の面積より大きいので

$$m(b-a) \leq \int_a^b dt f(t) \leq M(b-a),$$

が成り立つ。両辺 $b-a > 0$ で割って

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b dt f(t) \leq M.$$

中間値の定理より、ある $a \leq \tau \leq b$ が存在して、

$$f(\tau) = \frac{1}{b-a} \int_a^b dt f(t),$$

を満たす。

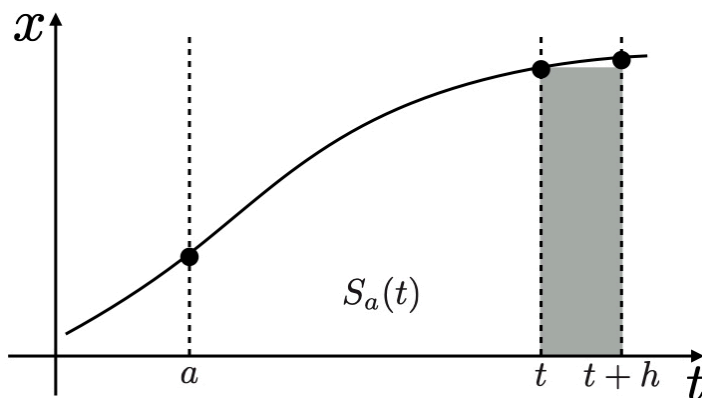


図16 面積と微分

いま、積分区間の左端を $t = a$ に固定し、右端は t として自由に動かすことにする。このとき $t \geq a$ と、そこから微小に動かした $t+h$ のところで細い領域をつくるとこの面積は底積分の性質から、

$$\begin{aligned} S_a(t+h) - S_a(t) &= \int_a^{t+h} dt f(t) - \int_a^t dt f(t) \\ &= \int_t^{t+h} dt f(t) + \int_a^t dt f(t) - \int_a^t dt f(t) \\ &= \int_t^{t+h} dt f(t). \end{aligned}$$

ここで $S_a(t)$ は区間 $[a, t]$ でグラフと t 軸に囲まれた部分の面積を表す t の函数. 中間値の定理からある $t \leq \tau \leq t+h$ が存在して,

$$S_a(t+h) - S_a(t) = f(\tau) \cdot h,$$

が成り立つ. 両辺を h でわって $h \rightarrow 0$ とすれば,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_a(t+h) - S_a(t)}{h} = f(t). \quad (11.5)$$

左辺は微分の定義になっており, $S_a(t)$ を微分すると $f(t)$ に等しくなることを意味する. 逆に言えば, $f(t)$ の原始函数は $S_a(t)$ である. すなわち $f(t)$ の不定積分を $F(t) + C$ とすれば,

$$S_a(t) = F(t) + C,$$

である. ところで, $t = a$ のときは明らかに $S_a(a) = 0$ であるから,

$$0 = F(a) + C.$$

ゆえに, $C = -F(a)$ と積分定数が定まる. さらに右端を $t = b$, ($b \geq a$) に固定すれば,

$$S_a(b) = F(b) - F(a).$$

積分の定義より $S_a(b)$ を積分記号を用いて

$$\int_a^b dt f(t) = F(b) - F(a), \quad (11.6)$$

となって区間 $[a, b]$ でグラフと t 軸に囲まれた部分の面積が, 区間両端での原始函数の値の差で与えられる.

$S_a(t)$ を定積分で書くと $\int_a^t dt' f(t') = F(t) - F(a)$ となる.¹³⁾ この両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt} \int_a^t dt' f(t') = f(t), \quad (11.7)$$

を得る. たしかに函数 f を積分して微分すると元の函数に戻っている. これは**微分積分学の基本定理**として知られている.

また微分して積分しても同様に元の函数に戻る:

$$\int_a^b dt \frac{d}{dt} F(t) = F(b) - F(a). \quad (11.8)$$

これは区分求積法により簡単に示せる. 区間 $[a, b]$ を N 個の微小区間にわけて

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{N-1} [F(t_{i+1}) - F(t_i)].$$

¹³⁾ 被積分函数では変数の重複を避けるために t ではなく t' を用いた. 後の置換積分で見ると変数は何を用いても良い.

平均値の定理により区間 $[t_i, t_{i+1}]$ においてある τ_i が存在して

$$\frac{F(t_{i+1}) - F(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = F'(\tau_i),$$

を満たす。これにより

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{N-1} F'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i).$$

$t_{i+1} - t_i = (b - a)/N$ であり $N \rightarrow \infty$ の極限をとると $\tau_i \rightarrow a + i(b - a)/N$ なので区分求積法により示したい式が導かれる。

具体的な函数の積分を区分求積法によって求めてみよう。区間 $[t_0, t_1]$ で1次函数 $x = vt$ をとる。原始函数は $F(t) = vt^2/2$ であり t 軸と囲まれる面積 S は積分計算によって

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt vt = \left[\frac{1}{2} vt^2 \right]_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{2} v(t_1^2 - t_0^2).$$

一方区分求積法からは、

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{t_1 - t_0}{N} v \left(t_0 + i \frac{t_1 - t_0}{N} \right)$$

和の公式を使うと、

$$\sum 1 = N - 1, \quad \sum n = \frac{1}{2} N(N - 1),$$

であるから、

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} (t_1 - t_0) \left[vt_0 \left(1 - \frac{1}{N} \right) + \frac{1}{2} v(t_1 - t_0) \left(1 - \frac{1}{N} \right) \right] = \frac{1}{2} v(t_1^2 - t_0^2),$$

となって所期の結果を与える。特に今の場合、グラフと t 軸で囲まれる領域は台形であり得られた結果は台形の面積の公式そのものである。

最後に置換積分の話をしておく。ある場合には函数を積分をするときには変数を別のものに取り替えた方が計算しやすい場合がある。ある函数 f の原始函数を F として

$$\int_a^b dt f(t) = F(b) - F(a),$$

が成り立っているとする。ここで $t = g(s)$ という変数変換を考える。合成函数の微分を思い起こすと

$$\frac{d}{ds} F(g(s)) = \frac{dF(g(s))}{dg(s)} \cdot \frac{dg(s)}{ds},$$

なので、両辺を区間 $[s_a, s_b]$ 上で積分すれば

$$\int_{s_a}^{s_b} ds \frac{d}{ds} F(g(s)) = \int_{s_a}^{s_b} ds \frac{dF(g(s))}{dg(s)} \cdot \frac{dg(s)}{ds},$$

となる. ただし s_a, s_b は $a = g(s_a), b = g(s_b)$ を満たす. 左辺では微分して積分すると元の関数に戻ることを適用し,

$$(\text{l.h.s.}) = F(g(s_b)) - F(g(s_a)) = F(b) - F(a) = \int_a^b dt f(t).$$

右辺では F の微分は f であることから結局,

$$\int_a^b dt f(t) = \int_{s_a}^{s_b} ds f(g(s)) \cdot \frac{dg(s)}{ds}, \quad (11.9)$$

となる. 一般に変数変換 $t = g(s)$ によって t から s へ変換すると, 積分区間が

$$\begin{array}{c|c} t & a \rightarrow b \\ \hline s & s_a \rightarrow s_b \end{array}$$

と変換され, dg/ds の因子が付け加わる.

置換積分は次のような積分の場合に威力を発揮する:

$$\int_0^1 dt \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

上の積分で $t = \sin \varphi$ とおくと分母が $\cos \varphi$ と簡潔になることに気づく. そのとき積分区間は,

$$\begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow 1 \\ \hline \varphi & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

と変換する. そして被積分函数には

$$\frac{dt}{d\varphi} = \cos \varphi,$$

の因子が加わり,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos \varphi \cdot \frac{1}{\cos \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

となる.¹⁴⁾

最後に定積分の方法をまとめておく. 区間 $[a, b]$ 上で連続な函数 f の積分を

$$\int_a^b dt f(t), \quad (11.10)$$

とかき, これは函数 $x = f(t)$ のグラフと t 軸で囲まれる領域の面積に一致する. $[a, b]$ 上での f の原始函数を F とすると, 定積分は

$$\int_a^b dt f(t) = \left[F(t) \right]_a^b := F(b) - F(a), \quad (11.11)$$

によって計算される. 函数 f から原始函数 F を求めるには部分積分 (10.8) や置換積分 (11.9) といった方法がある.

¹⁴⁾ この積分の原始函数は逆三角函数とよばれるものであり, そのことに気づけばこのような置換積分を行う必要はない.

PROBLEM

PROBLEM1. 次の関数の積分を計算せよ：

$$\int_a^b dt \sin t \cdot \cos t.$$

SOLUTION. 倍角の公式から明らかに,

$$\begin{aligned} \int_a^b dt \frac{1}{2} \sin 2t &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2t \right]_a^b \\ &= -\frac{1}{4} (\cos 2b - \cos 2a) \\ &= \frac{1}{2} (\sin^2 b - \sin^2 a). \end{aligned}$$

2行目から3行目へは倍角の公式を再び用いた.

あるいは $\cos t$ は $\sin t$ の微分であることに注意すれば,

$$\int_a^b dt \sin x \cdot \cos t = \int_a^b dt \sin t \cdot \frac{d}{dt}(\sin t).$$

そこで新たな変数として $s = \sin t$ とおくと,

$$\int_a^b dt s(t) \cdot \frac{ds(t)}{dt} = \int_{\sin a}^{\sin b} ds \frac{dt}{ds} s \cdot \frac{ds}{dt} = \int_{\sin a}^{\sin b} ds s.$$

この積分は容易に実行できて,

$$\int_{\sin a}^{\sin b} ds s = \left[\frac{s^2}{2} \right]_{\sin a}^{\sin b} = \frac{1}{2} (\sin^2 b - \sin^2 a),$$

となって同じ結果を得る.

PROBLEM2. 次の関数の積分を計算せよ：

$$\int_a^b dt \tan t.$$

ただし $a, b \in (-\pi/2, \pi/2)$ とする.

SOLUTION.

$$\int_a^b dt \tan t = \int_a^b dt \frac{\sin t}{\cos t}$$

$\sin t$ は $\cos t$ の微分であるから変数変換 $s = \cos t$ をおもいつく. すると,

$$\frac{dt(s)}{ds} = -\frac{1}{\sin t}, \quad \begin{array}{c|c} t & a \rightarrow b \\ \hline s & \cos a \rightarrow \cos b \end{array}$$

となって,

$$-\int_{\cos a}^{\cos b} ds \frac{1}{s} = -\left[\ln s \right]_{\cos a}^{\cos b} = \ln \frac{\cos a}{\cos b}.$$

§12. Taylor の定理

物理学においては, 全体の関数形がわからないが限られた領域での振る舞いを議論することがしばしばある. ある現象を記述する物理量の関数形を初等関数 (三角関数や指数・対数関

数など) で表せることはまれである. そこで函数形を厳密に求める代わりに, その振る舞いとよく似た別の初等函数に置き換えることをする. このとき用いられるテクニックの 1 つが Taylor 展開とよばれるものであり, 函数を多項式に置き換えられる.

函数 $x = f(t)$ について $t = t_0$ という点をとって

$$f(t) \simeq f(t_0),$$

と近似する. これは $t = t_0$ でのみ厳密に正しい. この精度での近似を第 0 次近似という. 次に $f(t)$ の微分に第 0 次近似を適用して $f'(x) \simeq f'(x_0)$ となるので, 両辺を t で積分して戻すと $f(t) \simeq C + f'(t_0)t$ となる. $t = t_0$ で厳密に一致する条件から積分定数は $C = f(t_0) - f'(t_0)t_0$ となって結局,

$$f(t) \simeq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \quad (12.1)$$

となる. これは函数を $t = t_0$ の接線によって近似している. 実際右辺第 1 項を移項し両辺を $t - t_0$ で割って $t \rightarrow t_0$ とすればそれは微分の定義になっている. この精度での近似を一次近似という. もし何かの議論や計算をしたいときには $f(t)$ のままで進めるよりも 1 次函数の形の方がはるかに容易である. 1 次近似では粗すぎると思うときには, 第 2 次近似をとって 2 階微分 $f''(t) \simeq f''(t_0)$ として同様のことを行えばよい. 以下繰り返して,

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{f'''(t_0)}{3!}(t - t_0)^3 + \cdots, \quad (12.2)$$

を得ることができる.

これは近似によるナイーブな議論であるから, まずは **Taylor の定理**を示そう. 函数 f は $t = t_0$ の近傍で n 回微分が可能で $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ は連続とする. このとき近傍内の任意の $t \neq t_0$ においてある $\tau \in (t, t_0)$ (または $\tau \in (t_0, t)$) が存在して,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \frac{f^{(n)}(\tau)}{(n)!}(t - t_0)^n, \quad (12.3)$$

が成立する. 右辺第 2 項を **Lagrange の剰余項**という.

証明のために変数 $s = t - t_0$ で定義された函数

$$F(s) := f(s + t_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} s^k,$$

を導入する. $s > 0$ としても議論の一般性を失わない. F も n 回微分が可能で $F(0) = F'(0) = \dots = F^{(n-1)}(0) = 0$ かつ $F^{(n)}(s) = f^{(n)}(s + t_0)$ である. まず F と s^n に対する Cauchy の平均値の定理により,

$$\frac{F(s)}{s^n} = \frac{F(s) - F(0)}{s^n - 0^n} = \frac{F'(s_1)}{ns_1^{n-1}},$$

を満たす $s_1 \in (0, s)$ が存在する. F' と s^{n-1} に対する Cauchy の平均値の定理により,

$$\frac{F'(s_1)}{s_1^{n-1}} = \frac{F'(s_1) - F'(0)}{s_1^{n-1} - 0^{n-1}} = \frac{F''(s_2)}{(n-1)s_2^{n-2}},$$

を満たす $s_2 \in (0, s_1)$ が存在する. 以下これを繰り返して $s_n \in (0, s_{n-1})$ に対して

$$\frac{F^{(n-1)}(s_{n-1})}{s_{n-1}} = \frac{F^{(n-1)}(s_{n-1}) - F^{(n-1)}(0)}{s_{n-1} - 0} = \frac{F^{(n)}(s_n)}{s_n},$$

を得る. 以上の結果を合わせれば

$$\frac{F(s)}{s^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(s_n + t_0) s^n.$$

$s_n = \tau - t_0$ とおいて元の変数 t に戻すと,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!} (t - t_0)^n,$$

が導かれる □. Taylor の定理の証明には微分の性質しか用いていないことに注意せよ.

Lagrange の剰余項 $R_n(t)$ とおいたとき, ある t の範囲で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t) = 0, \quad (12.4)$$

を満たすならば

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k, \quad (12.5)$$

とできる. これを函数 $f(t)$ の $t = t_0$ まわりの **Taylor 展開** という. 特に $t_0 = 0$ のときには,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} t^2 + \dots, \quad (12.6)$$

となり, **Maclaurin 展開** とよぶこともある. 本稿では統一して Taylor 展開という.

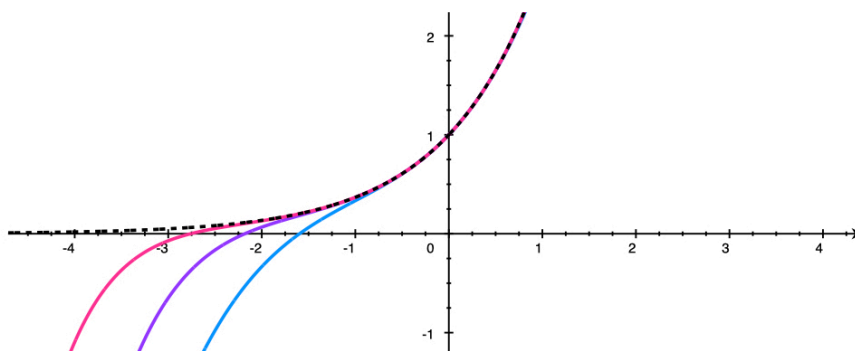


図 17 指数函数の Taylor 展開の様子. それぞれ 3 次 (青), 5 次 (紫), 7 次 (赤) 近似で, 高次の項を取り入れるほど元の函数に一致していく.

冒頭で述べたように Taylor 展開が有用であるのはおしなべて函数をその引数の冪で表現できることである. 指数函数の Taylor 展開は,

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{4!} t^4 + \dots \quad (12.7)$$

特に $t = 1$ のとき

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

となり、これは Napier 数の別表現として知られる。

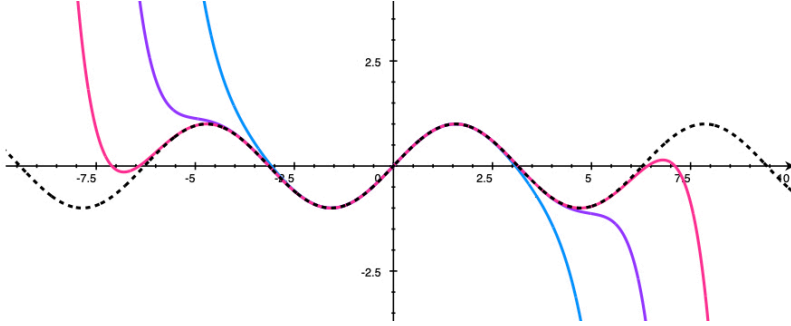


図 18 正弦函数の Taylor 展開の様子. それぞれ 3 次 (青), 5 次 (紫), 7 次 (赤) 近似.

三角函数を Taylor 展開すれば,

$$\begin{aligned} \sin t &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \dots, \\ \cos t &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots. \end{aligned} \tag{12.8}$$

正弦函数は奇数次の項だけが残る, 余弦函数では偶数次の項だけが残る. これは三角函数のグラフの対称性の帰結である. 指数函数も三角函数も全ての t で展開可能である.

他に便利な例として

$$\begin{aligned} \ln(1-t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \dots, \\ \frac{1}{1-t} &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k = 1 + t + t^2 + \dots. \end{aligned} \tag{12.9}$$

これら 2 つは $|t| < 1$ でのみ展開可能である.

物理の計算においては厳密な (無限の精度で) 値が求まる必要はない. 冪で展開する量 $t - t_0$ が微小な場合 ($t - t_0 \ll 1$) には高次の項は 1 に比べて十分小さくなるので無視することができる. よく用いる近似として, 2 次以上を無視した 1 次までの近似では,

$$f(t) \simeq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \tag{12.10}$$

この近似を適用するとたとえば三角函数は $t = 0$ のまわりで $\sin t \simeq t$, $\cos t \simeq 1$, 指数函数は $e^t \simeq 1 + t$ で近似できる.

PROBLEMS

PROBLEM1. 次の函数を $t = 0$ まわりで Taylor 展開せよ:

$$(I) \frac{1}{\sqrt{1+t}}, \quad (II) \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad (III) \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

SOLUTION. (I) まず3階微分までを計算してみると

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)' &= -\frac{1}{2}(1+t)^{-3/2}, & \left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)'' &= (-1)^2 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2^2}(1+t)^{-5/2}, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)''' &= (-1)^3 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3}(1+t)^{-7/2}, \end{aligned}$$

となっている. ここから k 階微分では

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)^{(k)} = (-1)^k \cdot \frac{(2k-1)!!}{2^k}(1+t)^{-(2k+1)/2},$$

と予想される. ただし $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots$ であり $k=0$ は除外しておく必要がある. 実際これをもう一度微分すれば

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)^{(k+1)} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}(1+t)^{-(2k+3)/2},$$

となって帰納的に示される. よって $t=0$ まわりの Taylor 展開は

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{k!2^k} t^k = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{16}t^3 + \cdots.$$

(II) $\cosh t$ は微分すると $\sinh t$ でありもう一度微分すると元に戻る. $\cosh 0 = 1, \sinh 0 = 0$ なので偶数幕だけが残る. それゆえ $k = 2n$ とおいて

$$\cosh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \cdots.$$

(III) (II) と同様にして $\sinh t$ は微分すると $\cosh t$ でありもう一度微分すると元に戻る. $\cosh 0 = 1, \sinh 0 = 0$ なので奇数幕だけが残る. それゆえ $k = 2n+1$ とおいて

$$\sinh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + \cdots.$$

PROBLEM2. 次の函数を $t = 0$ まわりで Taylor 展開して3次近似まで求めよ:

$$(I) \tan t, \quad (II) t \cot t,$$

SOLUTION. (I) 3階微分までを計算してみると

$$\begin{aligned} (\tan t)' &= \frac{1}{\cos^2 t}, & (\tan t)'' &= \frac{\tan t}{\cos^2 t}, \\ (\tan t)''' &= \frac{1}{\cos^4 t} + \frac{\tan^2 t}{\cos^2 t}, \end{aligned}$$

これらから

$$\tan t = 0 + t + 0 \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t^3 + \cdots = t + \frac{t^3}{3} + \cdots.$$

(II) 3 階微分までを計算してみると

$$\begin{aligned}(t \cot t)' &= \cot t - \frac{t}{\sin^2 t} = \frac{\sin 2t - 2t}{1 - \cos 2t}, \\(t \cot t)'' &= \frac{2(t \cot t - 1)}{\sin^2 t} = \frac{2(t - \tan t)}{\sin^2 t \cdot \tan t}, \\(t \cot t)''' &= \frac{6 \sin t \cos t - 4t \cos^2 t - 2t}{\sin^4 t} = \frac{4}{(1 + \cos 2t)^2} \left[3 \sin 2t - 2t(2 + \cos 2t) \right],\end{aligned}$$

これらの $t \rightarrow 0$ での値を調べるには l'Hospital の定理 (9.6) を適用して

$$(t \cot t)' |_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t - 2t}{1 - \cos 2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2t - 2}{1 + 2 \sin 2t} = 0,$$

とすればよい. 2 階微分では

$$\begin{aligned}(t \cot t)'' |_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(t - \tan t)}{\sin^2 t \cdot \tan t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{2}{\cos^2 t}}{2 \sin t \cos t \tan t + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2}{2 \cos^2 t + 1} = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

3 階微分の途中計算は省略するが同じような変形を繰り返すことで

$$(t \cot t)''' = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2t}{\cos^2 2t + \cos 2t - \sin^2 2t} = 0,$$

がわかる. 以上より

$$t \cot t = 1 + 0 - \frac{1}{3}t^2 + 0 + \dots = 1 - \frac{t^2}{3} + \dots$$

PROBLEM 3. 次の函数を $t = 0$ まわりで Taylor 展開せよ:

$$(I) \arctan t, \quad (II) \operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t ds e^{-s^2},$$

SOLUTION. (I) $\arctan t$ の Taylor 展開を求めるために函数 $f(t) = 1/(1+t)$ の Taylor 展開を利用する:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

$\arctan t$ を 1 階微分すると t^2 の函数として

$$(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n},$$

が成立する. 一方で $\arctan t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k / k!$ と Taylor 展開されたとすると

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1},$$

が成り立つ. 左辺には t の偶数幕しか現れないから右辺で $k = 2n + 1$ とおいて

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n)!} t^{2n}.$$

各 t の幕で係数を比較して

$$a_{2n+1} = (-1)^n (2n)!, \quad a_{2n} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

と定まる。したがって

$$\arctan t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

(II) erf t の Taylor 展開を求めるために函数 $f(t) = e^{-t}$ の Taylor 展開を利用する:

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n.$$

erf t を 1 階微分すると t^2 の函数として

$$(\operatorname{erf} t)' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n},$$

が成立する。一方で erf $t = (2/\sqrt{\pi}) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k / k!$ と Taylor 展開されたとすると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1},$$

が成り立つ。左辺には t の偶数冪しか現れないから右辺で $k = 2n + 1$ とおいて

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n)!} t^{2n}.$$

各 t の冪で係数を比較して

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad a_{2n} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

と定まる。したがって

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} t^{2n+1}.$$

§ 13. 加速度

速度が時間 t を含む場合はどうであろうか。速度を微分して、

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad (13.1)$$

という量を定義する。これは位置の 2 階微分である。¹⁵⁾ この \mathbf{a} を物体の**加速度** (acceleration) という。

加速度について直感的に理解しておこう。私たちが歩いたり走ったり、車や飛行機あらゆるものがその速度を変化させようとするとき、加速もしくは減速している。初め静止していた

¹⁵⁾ ある函数 $x = f(t)$ を n 回微分したものを f の n 階微分といい、

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n}(t),$$

とかく。2 階微分は x'' ともかく。

人が歩き出したり、走っている車がブレーキをかけると、そこに速度の変化がある。これが加速度の物理的意味である。それは人間の足の筋肉によるものであり、また車が減速するのはブレーキ機構により生じるものである。さらに地球が太陽のまわりを回転するのは太陽の重力によって少しずつ軌道が曲げられているからである。これらに共通することは動くものに、なんらかの「力」が働いていることである。

この力によって加速度が生じ、速度ベクトルの変化が生じるようである。

加速度から位置ベクトルを求めてみよう。加速度が時間の函数、

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \\ f_z(t) \end{pmatrix},$$

で与えられるとする。速度ベクトルは $f_i(t)$ の原始函数を $g_i(t)$ とすれば、

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} g_x(t) + C_x \\ g_y(t) + C_y \\ g_z(t) + C_z \end{pmatrix}.$$

ただし C_x, C_y, C_z は積分定数。さらに $g_i(t)$ の原始函数を $h_i(t)$ とすれば、

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} h_x(t) + C_x t + D_x \\ h_y(t) + C_y t + D_y \\ h_z(t) + C_z t + D_z \end{pmatrix},$$

となる。ただし D_x, D_y, D_z は積分定数。

加速度ベクトルから位置ベクトルを求めるとすると $2 \times 3 = 6$ 個の積分定数が現れる。これらを定めるには位置と速度に関する初期条件 (initial condition) が必要がある。つまり位置と速度の測り始めの時刻 $t = t_0$ での値 $\mathbf{r} = (x_0, y_0, z_0)$ と $\mathbf{v} = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ を与える。時刻 $t = t_0$ では上の結果がこれらの初期値に等しくなければならないという条件から (簡単のため x 成分だけ)、連立方程式

$$v_{x0} = g_x(t_0) + C_x, \quad x_0 = h_x(t_0) + C_x t_0 + D_x,$$

が成立する。これらを解いて C_x, D_x が

$$\begin{aligned} C_x &= v_{x0} - g_x(t_0), \\ D_x &= x_0 - h_x(t_0) - v_{x0} t_0 + g_x(t_0) t_0. \end{aligned}$$

よって速度と位置は

$$\begin{aligned} x &= x_0 + h_x(t) - h_x(t_0) + (v_{x0} - g_x(t_0))(t - t_0), \\ v_x &= v_{x0} + g_x(t) - g_x(t_0), \end{aligned}$$

と求まる。

例として加速度が定数 (a_x, a_y, a_z) で与えられるときは、

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_x t + C_x \\ a_y t + C_y \\ a_z t + C_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_x t^2 + C_x t + D_x \\ \frac{1}{2} a_y t^2 + C_y t + D_y \\ \frac{1}{2} a_z t^2 + C_z t + D_z \end{pmatrix},$$

初期条件 $t = 0$ で $\mathbf{v} = (v_0, 0, 0)$ と $\mathbf{r} = (x_0, 0, 0)$ を与えると物体の軌道は

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_x t^2 + v_0 t + x_0 \\ \frac{1}{2}a_y t^2 \\ \frac{1}{2}a_z t^2 \end{pmatrix},$$

となる。

もし加速度を何らかの方法で知ることができたならば、物体の運動は初期条件だけから完全に決定される。はじめに述べたように加速度は物体に外部の力がはたらくときに生じる。この経験則に基づいた加速度を与える方法は次章にゆずる。

加速度の変化はなんらかの意味をもっているのであろうか。加速度の微分をとって、

$$\mathbf{j} := \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}, \quad (13.2)$$

と定義する。これは**躍度** (jerk) とよばれる量である。次章で述べるように現実世界と直接に対応をもつのは2階微分である加速度であり、ここから立つ2階微分方程式を解けば位置と速度は定まる。したがって簡単な問題を解く上で躍度は不要な情報であることが多い。ただ電子のような荷電粒子の加速度運動に際しては躍度が関与する物理量が現れる。荷電粒子は加速度運動するときその加速度に依存したエネルギーの光を放出する。そのとき放出の反動で荷電粒子は減速する (Lorentz 摩擦)。この減速する加速度の大きさは躍度に比例する。¹⁶⁾

§ 14. 多変数関数の微積分

多変数関数の場合微分積分の定義はどのように一般化されるべきであろうか。ここでは厳密な議論は他書に委ねて、ラフな定義にとどめる。

独立な N 変数関数の微分について考えよう。 N 変数関数 $f = f(x_1, \dots, x_N)$ の i 番目の変数 x_i による微分は、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_N) - f(x_1, \dots, x_N)}{h_i}, \quad (14.1)$$

で定義される。つまり1つの変数で微分するときには他の変数を定数とみなして微分する演算のこととなる。この演算を x_i による関数 f の**偏微分** (partial derivative) という。例として2変数関数 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) を x, y でそれぞれ偏微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + by, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = bx + 2cy.$$

さらに2階微分は4種類存在し、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2a, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2c. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= b, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= b, \end{aligned}$$

¹⁶⁾ 筆者の知る限り躍度のさらなる微分が重要な物理量として登場することはない。

となる。3つ目は y 偏微分の後 x 偏微分しており、4つ目は x 偏微分の後 y 偏微分している。この2つの微分は一致しているので微分の順番は結果に関係ない。

一般に N 変数関数 f の変数 x_i と x_j についての微分 $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ と $\partial^2 f / \partial x_j \partial x_i$ が連続ならば、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad (14.2)$$

が成立し、 x_i と x_j についての微分は可換という。

よく使われる連続関数の分類を導入しよう。関数 f の1階から n 階導関数が存在し全て連続なとき、 f は C^n 級関数 (class C^n) という。多項式や三角関数など初等関数のほとんどは任意の導関数が連続である。このように無限階微分可能で連続な関数は C^∞ 級関数 (class C^∞) という。物理で扱う関数もほとんど C^∞ 級関数である。熱力学、統計力学の分野では不連続関数を扱うが、不連続点はたかだか有限個 (たいてい1つ) でありそれ以外の点においては C^∞ 級関数となる。

2階微分についての可換性の条件を導関数に繰り返し適用することで次がわかる： N 変数関数 f が C^n 級関数のとき、 n 階微分までの微分は可換である。

偏微分は1変数に関する変化率を表すが、 N 変数全てに関する変化率も考えることができる。 N 変数関数 f について、

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_N + h_N) - f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N g_i h_i + \varepsilon(h_1, \dots, h_N), \quad (14.3)$$

かつ

$$\lim_{(h_1, \dots, h_N) \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_N^2}} = 0, \quad (14.4)$$

が成り立つような g_i が存在するとき f は全微分可能 (totally differentiable) という。ただし $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ 。証明は省略するが2つの定理を紹介する。まず f が全微分可能ならば f は連続かつ偏微分可能であり、

$$g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (14.5)$$

また f が C^1 級ならば全微分可能である。以上のことから $(h_1, \dots, h_N) \rightarrow \mathbf{0}$ の極限では

$$df = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad (14.6)$$

とかけて、 f の全微分 (total derivative) という。全微分は接平面の式と密接な関係にあるがここでは触れない。

多変数の場合の Taylor 展開を紹介する。 N 変数関数 $f(x_1, \dots, x_N)$ を $(x_1, \dots, x_N) =$

(x_{10}, \dots, x_{N0}) のまわりで Taylor 展開すると,

$$f(x_1, \dots, x_N) = f(x_{10}, \dots, x_{N0}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10}, \dots, x_{N0}) \cdot (x_i - x_{i0}) \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_{10}, \dots, x_{N0}) \cdot (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0}) + \dots$$

多変数の場合は全ての冪の組み合わせが現れることに注意せよ. たとえば 2 変数関数 $f(x, y)$ の場合では 2 次の項は x^2, xy, y^2 と 3 項存在する. Maclaurin 展開は $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ として,

$$f(x_1, \dots, x_N) = f(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0}) \cdot x_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0}) \cdot x_i x_j + \dots,$$

とかける.

偏微分をすべての変数でそれぞれ行いそれらを数の組としてまとめれば N 次元ベクトル,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right),$$

が得られる. これを関数 f の**勾配** (gradient) といい,

$$\nabla f, \quad \text{grad } f, \tag{14.7}$$

などと書く. 本稿では ∇f の表記を採用する. 勾配ベクトルは関数 f の増加が最大となる方向を向いている. 点 (x_1, \dots, x_N) とそこから微小に \mathbf{h} だけずれた点 $(x_1 + h_1, \dots, x_N + h_N)$ での関数値の増加量は全微分により,

$$df = f(x_1 + h_1, \dots, x_N + h_N) - f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i + \mathcal{O}(h_i^2).$$

$\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ の極限では 2 次以上の項は無視できて, Cauchy-Schwarz の不等式により,

$$(df)^2 = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i \right)^2 \leq \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sum_j (h_j)^2.$$

右辺の $\sum (\partial f / \partial x_i)^2$ は f の勾配の大きさに等しいので結局,

$$(df)^2 \leq |\nabla f|^2 \mathbf{h}^2,$$

が成立する. Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立条件は 2 つのベクトルが平行なときなので, 勾配 ∇f とずれ \mathbf{h} が同じ向きするときである. このとき \mathbf{h} の大きさ一定のもとでの f の増加量は最大となる.

物体の位置はおおの時間 t の関数であった. では物体の位置の関数 $f = f(\mathbf{r}(t))$ の時間に関する変化率はどのように求まるだろうか. 時刻が t から $t + h$ へ微小に変化したときの関数 f の変化は

$$df = f(x(t+h), y(t+h), z(t+h)) - f(x(t), y(t), z(t)),$$

となる. 1 変数の Taylor 展開から $x(t+h) = x(t) + \dot{x}(t)h + \mathcal{O}(h^2)$ となるので, 全微分により

$$df = f(x + \dot{x}h, y + \dot{y}h, z + \dot{z}h) - f(x(t), y(t), z(t)) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i h + \mathcal{O}(h^2),$$

である. 両辺を h で割って $h \rightarrow 0$ の極限をとれば,

$$\frac{df(\mathbf{r}(t))}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{r}(t))}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(\mathbf{r}(t))}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f(\mathbf{r}(t))}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \nabla f \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (14.8)$$

これを物体の軌道に沿った f の**方向微分** (directional derivative) という. スカラー関数をスカラー t で微分しているので結果もスカラー量になっていることに注意せよ. 数学的に見れば質点の軌道とは $t \in \mathbb{R}$ から $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ への写像ととらえることもできる. t を微小に動かしたときに 3 変数 (x, y, z) は軌道の式 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ で決まっています, その上で軌道上の関数 $f(\mathbf{r}(t))$ の値がどれくらい変化するかを方向微分は表す.

方向微分を関数 f に作用する演算子として $\mathbf{v} \cdot \nabla$ とかこう ($\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$). 成分で具体的に書けば,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (14.9)$$

となる. これはベクトル \mathbf{v} をこの座標系の基本ベクトル \mathbf{e}_i で展開したときの表式とよく似ていることに気づく. すなわち各微分演算子をベクトルの基底と解釈することができる. 実際 x, y, z は独立変数なので微分演算がベクトルの意味で独立となる (つまり微分演算子の線型結合が 0 なら係数それぞれが 0 にひとしいことを意味する).

ではここまでの計算について具体例を見てみよう. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ は \mathbb{R}^3 上のスカラー場である. x による偏微分は,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}.$$

他の成分についても対称性から同様に $\partial r / \partial y = y/r$, $\partial r / \partial z = z/r$ が得られる. このことから r の勾配は,

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{n}, \quad (14.10)$$

となる. \mathbf{n} は大きさ 1 で**方向ベクトル**という. r の任意の関数 $f(r)$ については鎖法則から,

$$\nabla f = \frac{df}{dr} \nabla r = \frac{df}{dr} \mathbf{n}, \quad (14.11)$$

が得られる. $f(r)$ の勾配はその位置ベクトルと同じ方向 (負の場合は反対方向) を向いていて, その大きさは距離 r のみに依存していることがわかる. r の方向微分は,

$$\frac{dr}{dt} = \nabla r \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}. \quad (14.12)$$

次にスカラー場 $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$ をみてみよう. 勾配は,

$$\nabla \varphi = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right), \quad (14.13)$$

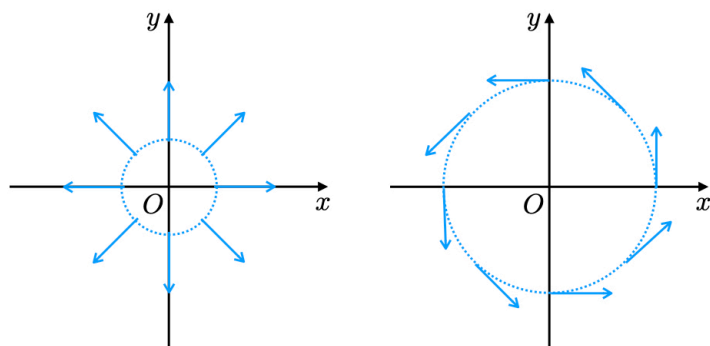


図19 勾配の例：(左) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (右) $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$.

である。 $\nabla\varphi$ は xy 平面に平行な面内で円周に沿って回転する向きを向いている。

最後に積分について軽く触れておこう。偏微分が定義されたのでその逆演算としての積分が定義できる。 N 変数関数 $f = f(x_1, \dots, x_N)$ の i 番目の変数 x_i による積分は、

$$\int dx_i f(x_1, \dots, x_N) = F_i(x_1, \dots, x_N) + C(x_1, \dots, \check{x}_i, \dots, x_N), \quad (14.14)$$

と書かれる。ここで F_i は f の原始関数であり x_i 偏微分で f に等しくなるような関数である。また C は x_i に依存しない関数で x_i 偏微分で 0 となる不定関数である。

例として $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ を y 積分すると

$$\int dy f = ax^2y + \frac{b}{2}xy^2 + \frac{c}{3}y^3 + C(x),$$

となる。ここで $C(x)$ は y によらない不定関数。

多変数の場合の積分区間は 1 変数の場合に比べてはるかに複雑である。つまりグラフと軸で囲まれる領域は 1 次元曲線、2 次元曲面、3 次元領域と様々考えられる。そうした幾何学的対象の上で多変数に関する積分、**多重積分**を定義できる。多重積分については章をあらためて議論することにしよう。

第 2 章 運動の法則

§ 15. 運動の法則

物体の位置を時間の関数として求めることを考えよう。積分を駆使すれば速度や加速度の情報から位置を求めることができるということは前節で見た。その際は積分だけでは定まらない 6 個の定数を初期条件から与える必要があった。

加速度は物体に働く「力」と関係していることは直感的にも明らかであろう。ボールを投げたり、荷物を引っ張ったり、手で力を加えると物体は動き出す。また重力によって落下したりする。

Newton はこれらの力と加速度の間の関係性を実験により見つけ出した。それは、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (15.1)$$

で与えられ、**Newton の運動方程式**（あるいは Newton 方程式）という。 m は物体の質量 (mass) であり、 \mathbf{F} は力 (force) という。

運動方程式から定性的にわかることは、同じだけ加速するためには、重い物体にはより大きな力が必要となることである。また同じ質量の物体に対してより大きく加速するためにはより大きな力が必要となる。加速する向きと力の向きは平行であることもわかる。

一般に、位置と速度と加速度を結びつける方程式のことを**運動方程式** (equation of motion) と言う。Newton 方程式は運動方程式の 1 つであり、これは質点の運動についてのみ成り立つ。大きさを持った普通の物体や流体を扱うにはこの方程式ではなくほかの方程式が適当である。¹⁾ 大きさを持った物体に関してはその変形や回転の運動がなければやはり Newton 方程式で記述することができる。詳細は剛体の章で述べることにしてここでは大きさを持った物体の並進運動にも Newton 方程式を適用する。

運動方程式だけからは質点の位置の関数形を完全に決定することはできない。Newton 方程式をみれば方程式は位置の 2 階の微分を含むために積分定数を 2 つ含む。これを取り除くために位置と速度のある時刻での値、初期条件が必要となる。もしくは後に述べる保存量を用いることでもこの不定性を取り除くことができる。

力は時間とともに変わる時間の関数であることもあるが、重力のように位置によって変

¹⁾ 例えば剛体の Euler 方程式や流体の Navier–Stokes 方程式がある。

わったり、空気抵抗のように速度によって変わったりするので一般には $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ とかけられる。²⁾ もし力が時間のみの関数であれば加速度が時間の関数として与えられ、速度と位置も積分により直ちに求めることが可能である。しかしながら力が速度や位置の関数である場合は事情が異なってくる。その場合、運動方程式は位置を未知関数とする微分方程式 (differential equation) となる。微分方程式の解法に一般論はないので力の関数形に応じて個別に議論することにする。

もっとも簡単な例として力が零ベクトルの場合を考えてみよう：

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (15.2)$$

このとき運動方程式より物体の加速度も零ベクトルである。積分により速度は定ベクトルとなり、速度の成分を $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とおく。 x 成分については、

$$x(t) = \int dt v_x = v_x t + C_x,$$

となる。初期時刻 $t = 0$ で位置 (x_0, y_0, z_0) にいたとすると、 $C_x = x_0$ と求まる。他の成分でも同様に結局、

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t + x_0 \\ v_y t + y_0 \\ v_z t + z_0 \end{pmatrix}, \quad (15.3)$$

となる。この物体の軌道は直線となり、**等速直線運動**と呼ばれる。ただし速度が全て0の場合は位置ベクトルは定数であり物体は静止する。物体に働く力が零ベクトルのとき物体は等速直線運動または静止することが導かれた。これを**慣性の法則** (the law of inertia) という。

慣性の法則が成り立っているときというのは、物体に力が働いていないということではない。働く力の総和が零ベクトルとなる場合もある。こういうとき力が**つりあっている**、合力が**0**という。あるいは状態が安定という意味で**力学的平衡** (mechanical equilibrium) の状態にあるともいう。力学的平衡状態であるときは物体は静止もしくは等速直線運動する。

考えている系に複数個の質点が存在する場合には質点それぞれで Newton 方程式が成立する。質点が N 個あったならば、 N 個の運動方程式、

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= \mathbf{F}_1, \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \mathbf{F}_2, \\ &\vdots \\ m_N \frac{d^2 \mathbf{r}_N}{dt^2} &= \mathbf{F}_N, \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし m_i , \mathbf{r}_i , \mathbf{F}_i は i 番目の質点の質量、位置、作用する力である。

²⁾ 加速度やさらなる高階微分も一般には含められるがここでは議論しない

二つの質点の場合を考えよう．運動方程式は、

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1,$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_2.$$

それぞれの物体に作用する力は次の二つに分類できる．1つ目は他方の物体から一方の物体に作用する力、**相互作用** (interaction) である．2つ目は系の外部からの力、**外力** (external force) である．それらを $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(\text{int})} + \mathbf{F}_i^{(\text{ex})}$, ($i = 1, 2$) とかこう．外部からの力というのはたとえば地球上で言えば重力や空気抵抗、摩擦などがある．地上に二人の人間が手で押し合っている例を考えよう．するとこの押し合う力が $\mathbf{F}^{(\text{int})}$ であり、地球からの重力が $\mathbf{F}^{(\text{ex})}$ である．

外部からの力 $\mathbf{F}^{(\text{ex})}$ が一様で両者に及ぼす力が等しいときに慣性の法則が成り立っていると運動方程式は、

$$0 = \mathbf{F}_1^{(\text{int})} + \mathbf{F}^{(\text{ex})},$$

$$0 = \mathbf{F}_2^{(\text{int})} + \mathbf{F}^{(\text{ex})}.$$

辺引き算すると、

$$\mathbf{F}_1^{(\text{int})} = -\mathbf{F}_2^{(\text{int})}, \quad (15.4)$$

となる．すなわち片方に働く力ともう片方に働く力の大きさは一致し二力は互いに逆向きである．これを**作用・反作用の法則**という．

地球上の物体にはすべて重力が働いている．それにもかかわらず机の上にある本が静止しているのは机が本を支える力と本の重力とがつり合うからである．このことは慣性の法則と作用・反作用の法則の帰結である．この重力に応じて物体を支える力のことを**垂直抗力** (normal force) という.³⁾ もし垂直抗力のようなつり合う力が働かなければ重力を支えきれず机は崩壊し本は重力に従って下に落ちるだろう．重力によって下に落ちるといふ加速運動が生じるのである．だからたとえば本ではなく象を机の上に持ってくると、象を支えるだけの垂直抗力が机には備わっていないならば、今度は机はつぶれ象は落下運動を始める．

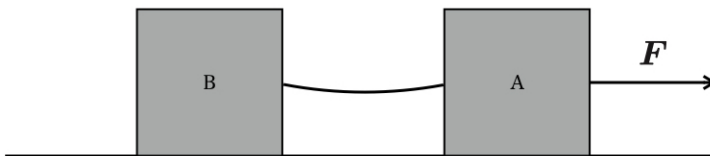


図 20 ひもでつながれた二物体

運動方程式に関して注意するならば、方程式上の物体に作用する力 \mathbf{F} はその物体に直接作用しているような近接力だけが許される．例をあげよう．図のように2つの物体がひもで結

³⁾ 一般の抗力は必ずしも面に垂直に作用しない．

ばれているときの一次元運動を考える。片方の物体 A を力 F で引っ張るとき、もう片方の物体 B に働く力は次のように考えて求める。物体 A に働く力は F とひもに引っ張られる力 $-T$ である。ひもは物体 A から T で引っ張られ、物体 B により $-T'$ の力で引っ張られる。それにより物体 B はひもから力 T' で引っ張られ、これ以外に力は働かない。物体 A, 物体 B, ひもの質量を m_A, m_B, m_s とするとそれぞれの運動方程式は

$$m_A a_A = F - T, \quad m_s a_s = T - T', \quad m_B a_B = T',$$

である。もしひもの質量が物体 A, B に比べて十分軽いならば $m_s \simeq 0$ と近似できて $T \simeq T'$ が成り立つ。すなわちひもの両端に働く力は等しいと近似できる。本稿で物体がひもで結ばれている場合は常にこの近似が成り立つものとする。

重力や電磁気力も一見遠隔から作用している様に思えるが、場の理論というものに移ればすべての作用は近接作用と解釈できるようになる。場については電磁気学の章で詳しく触れる。

以上の質点の運動に関する性質は次の 3 点にまとめられる：

1. 質点に作用する力の和が $\mathbf{0}$ に等しいとき、質点は静止または等速直線運動する
2. 質点に作用する力と加速度は比例し Newton の運動方程式にしたがう
3. 一方に働く力ともう一方に働く力の大きさは一致し互いに逆向きに作用する

これらを質点に関する**運動の法則**という。

§ 16. Galilei の相対性原理

物体に働く力がつりあっているとき、運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0}, \quad (16.1)$$

となる。これを解けば物体は静止または等速直線運動することが導かれる（慣性の法則）：

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t + x_0 \\ v_y t + y_0 \\ v_z t + z_0 \end{pmatrix}. \quad (16.2)$$

この節では慣性の法則について掘り下げて議論する。

静止または等速直線運動しているような系を**慣性系** (inertial frame of reference) という。

観測者は自身を観測しても常に原点で静止しているように見えるので、観測者の運動は観測者自身からはわからない。そこで「観測者が慣性系である基準系（慣性基準系）をいつでも設定することができる」という仮定をおくことにする。後で見るように慣性基準系から物体を観測したときに限り慣性の法則が成り立つ。すなわち慣性基準系は「力学的平衡な任意の物体に対して慣性の法則が成り立つ」ような観測者の系のことである。

慣性の法則だけでなく Newton の運動の法則はどれも慣性基準系でのみ成り立つ。もし観測者の運動が等速直線運動ではないならばこれらに修正が必要となる。たとえば円運動のよ

うな非等速直線運動をする観測者を考えることもあり、このような系を**非慣性系**という。非慣性系についてはあとの節で詳しく述べる。

いま慣性基準系にいる観測者 Alice から別の観測者 Bob の運動を観測する。そのとき Bob の速度が \mathbf{V} の等速直線運動であったとする。時刻 t での Alice から見た Bob の位置ベクトルは $\mathbf{V}t + \mathbf{b}$ となる。ただし \mathbf{b} は時刻 $t = 0$ での Bob の位置。

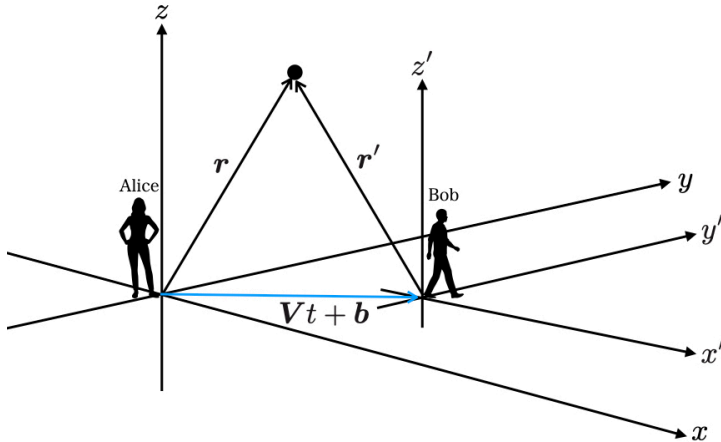


図 21 二人の慣性観測者 Alice と Bob

この二人の観測者が物体の運動を観測するときどのような違いがあるだろうか。Alice から観測すると位置ベクトル \mathbf{r} 、速度ベクトル \mathbf{v} であり、Bob から観測すると \mathbf{r}' 、 \mathbf{v}' であったとする。まず位置ベクトルの関係は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t + \mathbf{b}, \quad (16.3)$$

となる。両辺を微分することで速度の関係式

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \quad (16.4)$$

も得られる。したがって異なる慣性系から見た物体の速度の変換公式、**Galilei 変換**が得られた。

慣性基準系をいつでも設定できるという仮定をもっと具体的に言い換えよう。Galilei 変換で移りあえる観測者はすべて慣性基準系である。実際、Bob から見ると物体の速度は $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ であるから、Alice から見て等速直線運動する物体は Bob から見ても等速直線運動となる。したがって慣性基準系 Alice から見て Bob がどの位置にあらうとも等速直線運動する限り Bob も慣性基準系である。慣性の法則は Galilei 変換で移り合うすべての慣性基準系で成立する。もし Newton の運動方程式もすべての慣性基準系で成り立つ場合、この範囲での物理法則がすべての慣性基準系で同様に成り立つと言える。

観測者は座標を直交座標によって測るがその原点や座標軸の向きはどのようにとったとしても観測に影響がない。また時間の原点も同様である。さらに観測者の自由度として、一定の相

対速度 \mathbf{V} の観測者に移っても同様に運動の法則が成立し観測に影響しない。これを **Galilei の相対性原理** という。運動方程式と Galilei 変換の関係については節を改めて議論する。

最後に註として、Galilei 変換では「Alice と Bob の時間の進み方は同一である」ということが暗に仮定されている。もし時間の進み方も観測者によって異なるならば Galilei 変換では不適切である。時間を含めた観測者間の速度の変換規則は特殊相対性理論の章において議論する。

PROBLEM

PROBLEM1. 地上で静止する Alice が鉛直した向きに等速度 \mathbf{v} で落下する雨を観測している。Alice に対し速度 \mathbf{V} で運動する Bob から雨を観測したとき雨はどれだけ傾いて見えるか。

SOLUTION. Galilei 変換により Bob の観測する雨の落下速度は $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ である。雨は等速直線運動なので速度 \mathbf{v} の方向に落下している。よって雨の傾きは 2 つの速度 \mathbf{v} と \mathbf{v}' のなす角に等しい。なす角を θ とすると内積は $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = vv' \cos \theta$ なので

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{vv'}$$

Galilei 変換の式を代入して整理すれば

$$\cos \theta = \frac{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1 - \beta^2 - 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}}$$

ここで $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{V}/v$ である。

§ 17. 一様重力場

ここから数節にわたって力の例を具体的にあげて運動方程式を議論していく。この節ではもっとも身近な地上付近で物体にはたらく**重力**を議論する。重力は物体の質量 m に比例することがわかっている。

そこで地上付近の物体に作用する重力を比例係数を g として mg とおいてみよう。すると地上と垂直に z 軸をとれば重力だけが作用する質点の運動方程式は、

$$m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix},$$

である。 z 軸は上向きが正であるが、重力は下向きであるので mg には負符号がつく。両辺を m で割って、

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

つまり物体には質量に関係なく z 軸方向下向きに一定の大きさの加速度 g がかかる。こういうわけで g を**重力加速度**という。重力加速度の値は地球の緯度によって多少異なるが標準的な値は、

$$g = 9.80665 \text{ m/s}^2, \quad (17.1)$$

である⁴⁾.

この重力加速度の下での運動は簡単な積分計算から、

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{x0}t + x_0 \\ v_{y0}t + y_0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + z_0 \end{pmatrix} \quad (17.2)$$

と解ける．ここで (x_0, y_0, z_0) は $t = 0$ での初期位置， (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) は初速度である．

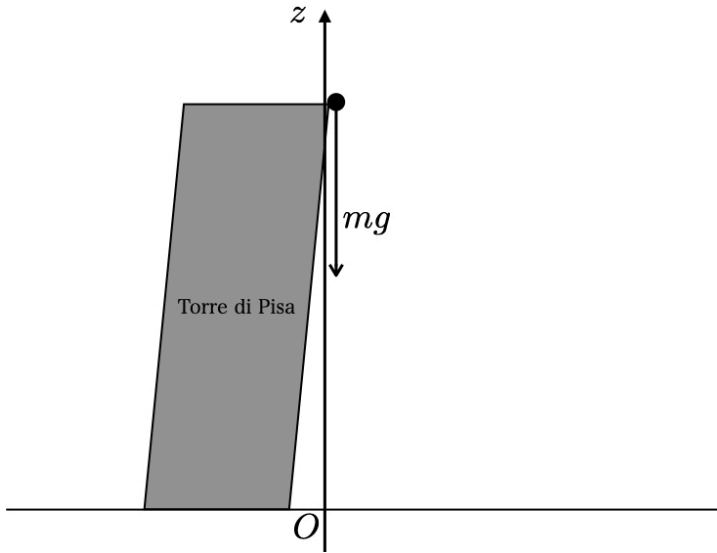


図 22 一様重力場中での自由落下（ピサの斜塔）

（Galilei が行なったとされる）ピサの斜塔の実験結果をこの式から預言してみよう．ピサの斜塔の建つ地点を原点にとって初期位置を $(0, 0, h)$ とする．そして質量 m の物体を落下させることを考える．すると手から物体を放した瞬間の初速度は $(0, 0, 0)$ であるから物体の軌道は (17.2) より、

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{pmatrix},$$

と与えられる．ピサの斜塔の高さは $h = 55\text{m}$ なので、地面に到達するまでの時間は $0 = -gt^2/2 + 55$ を $t > 0$ として解けば、

$$t = \sqrt{\frac{110}{g}} \simeq 3.35\text{ s},$$

と具体的に求まる．実際には空気抵抗などの影響によりこれよりも若干遅れるだろう．

⁴⁾ <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?gn>

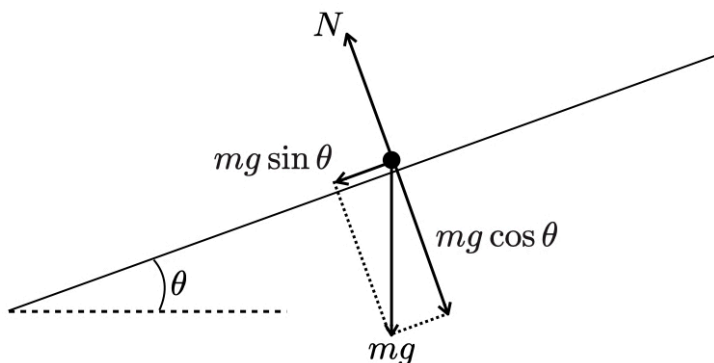


図 23 斜面上の質点の重力の作用

地上におかれた物体にも重力 mg がはたらく。これが地上で静止するためには力のつり合い条件から、

$$N = mg,$$

だけの垂直抗力が重力に対する反作用としてはたらかなければならない。これは水平面におかれた場合に正しい。斜面におかれた物体は重力によって滑り始める。運動方程式は斜面に平行な方向と垂直な方向に分解して考えれば良い。傾斜角を θ とすると垂直方向には運動しないので、

$$0 = -mg \cos \theta + N,$$

が成り立つ。つまり斜面からの垂直抗力によりつり合っている。斜面に沿っては加速度を a として

$$ma = mg \sin \theta,$$

が成り立つ。これから、

$$N = mg \cos \theta,$$

$$a = g \sin \theta.$$

つまり加速度が普通の落下のときより $1 - \sin \theta$ だけ小さくなっており、斜面があると物体はゆっくり滑っていくことがわかる。また $\theta = 0$ のとき水平面で等速直線運動する場合に一致し、 $\theta = \pi/2$ のとき普通の重力加速度で落下する場合に一致する。現実には斜面と物体の間に摩擦力がはたらくためもっと遅くなるか、完全に静止する。摩擦力については次節で触れよう。

次に $t = 0$ に原点にあってそこから物体を斜め上方向に打ち出す斜方投射の問題を考えよう。打ち出すときの速度が $(0, v_{y0}, v_{z0})$ であったならば軌道は (17.2) より、

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{y0}t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t \end{pmatrix},$$

と与えられる。 y 成分を t について解くと $t = y/v_{y0}$ であり、これを用いて z 成分から t を消去すれば、

$$z = -\frac{g}{2v_{y0}^2}y^2 + \frac{v_{z0}}{v_{y0}}y, \quad (17.3)$$

となり、質点は zy 平面内に Fig.24 のような**放物線軌道**を描くことがわかる。

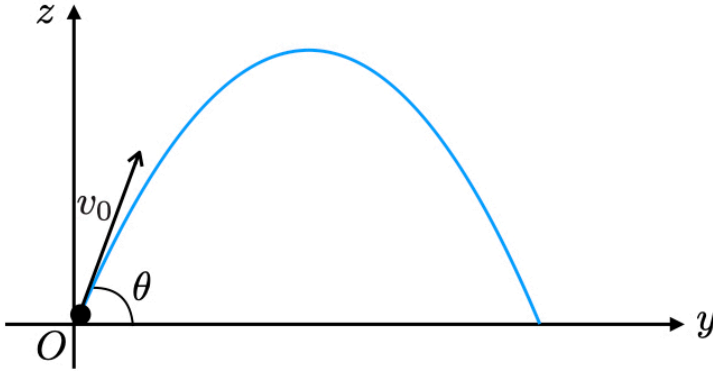


図 24 放物線軌道

平方完成により、

$$z = -\frac{g}{2v_{y0}^2} \left(y - \frac{v_{y0}v_{z0}}{g} \right)^2 + \frac{v_{z0}^2}{2g},$$

となるので $y = v_{y0}v_{z0}/g$ のときの $z = v_{z0}^2/2g$ が軌道の最高点の高さとなる。

再び地上まで落下してくるのにかかる時間は、位置の z 成分を見れば、

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t,$$

を $t \neq 0$ として解けばよい。したがって、

$$t = \frac{2v_{z0}}{g},$$

である。原点から落下点までの距離はこの時刻での位置の y 成分を見れば（あるいは放物線の式を $z = 0$ として y について解けば）、

$$y = \frac{2}{g}v_{y0}v_{z0}.$$

この距離はちょうど最高点までの距離の 2 倍となっている。打ち出すときの速さを $v_0 = \sqrt{v_{y0}^2 + v_{z0}^2}$ とし、打ち出すときの仰角を θ とすれば、ベクトルの幾何的な関係から、

$$v_{y0} = v_0 \cos \theta, \quad v_{z0} = v_0 \sin \theta,$$

とかける。これより落下点までの距離は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta, \end{aligned}$$

となり、 $\theta = \pi/2$ のとき最大となる．つまり仰角を $\pi/2$ にして物体を打ち出したときその飛距離が最大となる．

時刻 t での速度の z 成分は、

$$v_z = -gt + v_{z0}.$$

これを t について解いて、位置の z 成分の式に代入して整理すれば、

$$\frac{1}{2}v_z^2 - \frac{1}{2}v_{z0}^2 = -g(z - z_0),$$

が得られる．後の節で紹介するが、この式はエネルギー保存則と呼ばれる関係式である．

一様重力場の比例係数として質量 m が選ばれたがこの m は、偶然にも、Newton の運動方程式の左辺の比例係数 m に一致している．質量は重さに関連した量でありそれは天秤などで相対的に測ることができる．基準となる質量 m^* を定めれば、それとの比較で物体の質量を数値として定めることができる．

一方で運動方程式に現れる質量というのは運動のしにくさの指標であった．つまり質量の大きい物体ほど運動しにくいということを表す．やはりある基準となる物体に対して質量を定め、一定の力での運動を比較することで物体の質量を数値として定めることができる．この運動のしにくさをあらわす質量が重力にどれだけ反応するかをあらわす質量とが一致することはわれわれの経験則に基づいている．これは重力特有の性質であり、2 種類の質量の等価性に基づく議論は Einstein によって一般相対性理論という形にまとめられている．

PROBLEMS

PROBLEM1. 一様重力場の下で角度 θ の下り斜面に向かって仰角 $\alpha > 0$ で物体を初速 v_0 で打ち出す．打ち出した点を原点とするととき落下点の座標を求めよ．

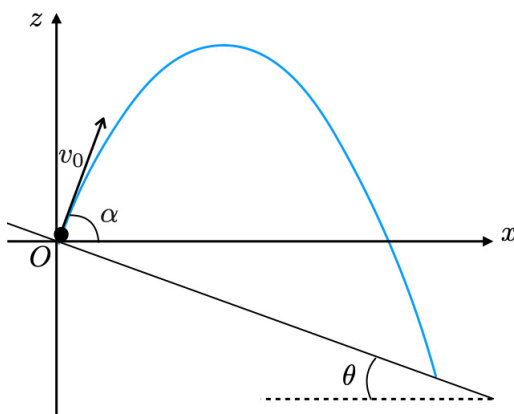


図 25

SOLUTION. 水平方向に x 軸をとり、垂直方向に z 軸をとる．また x 軸の正の方に斜面は下っているとす．時刻 t での x, z 座標は (17.2) において初期条件 $x_0 = 0, z_0 = 0, v_{x0} = v_0 \cos \alpha, v_{z0} = v_0 \sin \alpha$

とにおいて,

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos \alpha, \\ z(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha, \end{aligned}$$

を得る. 今 y 方向の運動は $y = 0, v_{y0} = 0$ としていることに注意. 1つ目の式を t について解きそれを $z(t)$ の式に代入して t を消去すれば,

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha,$$

という x についての二次関数が得られる. 斜面を式で表すと $z = -x \tan \theta, (\theta > 0)$ なので, 落下点の座標はこの2式の交点として求まる. したがって落下点の座標は,

$$\begin{aligned} x &= \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} (\tan \alpha + \tan \theta), \\ z &= -\frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} (\tan \alpha + \tan \theta) \tan \theta, \end{aligned}$$

となる.

PROBLEM2. モンキーハンティング: 銃をかまえた猟師がいて, 彼から水平距離 l 離れた, 高さ h の位置にいる猿を狙うとする. 時刻 $t = 0$ に猿は自由落下し, それと同時に猟師が発砲するとき, その発射角度 θ を,

$$\tan \theta = \frac{h}{l},$$

となるようにすれば命中することを示せ.

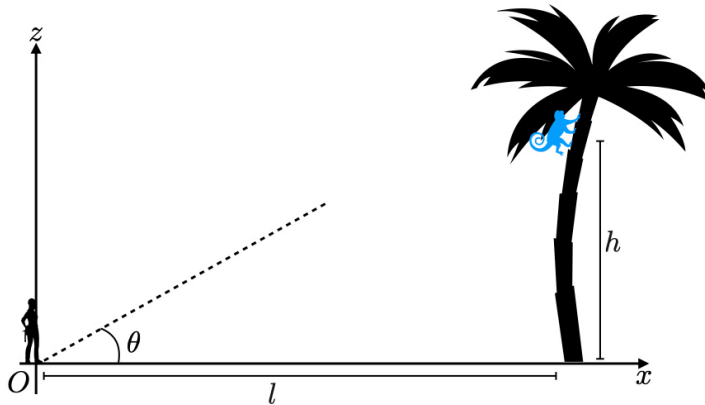


図 26 モンキーハンティング

SOLUTION. 水平方向に x 軸, 垂直方向に z 軸をとり, 猟師の銃口に原点を取る. 猿の自由落下の軌道は $x(t) = l, z(t) = h - gt^2/2$ となる. 一方, 銃弾の軌道は初速を v_0 とすると,

$$X(t) = v_0 t \cos \theta, \quad Z(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2,$$

となる (軌道を区別するために大文字を用いた). 銃弾が命中するのは $X = l$ に達したときである. 銃弾が $X = l$ に達する時刻は $T = l/(v_0 \cos \theta)$ である. 時刻 T での Z 座標は,

$$Z(T) = l \tan \theta - \frac{g l^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta},$$

となる。一方で時刻 T での猿の z 座標は、

$$z(T) = h - \frac{gt^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}.$$

よって $z(T) = Z(T)$ であるためには $l \tan \theta = h$ でなければならない \square .

PROBLEM3. バレーボールのサーブボールがコート内に着地するための初速度 v_0 に対する条件を求めよ。ただし片方のコートの奥行きを L 、ネットの高さを H 、サーブを打ち出す高さを h とする。

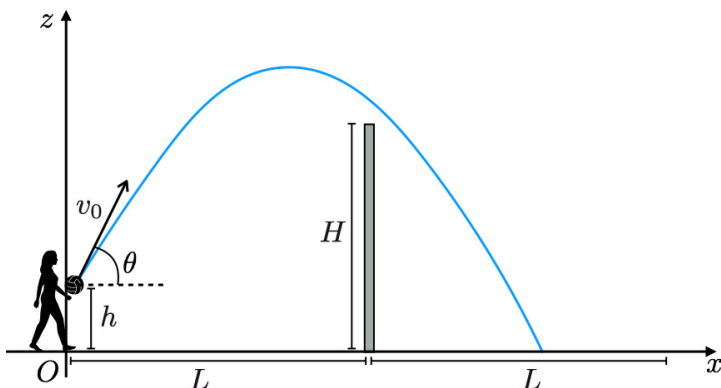


図 27 バレーのサーブの条件

SOLUTION. 水平方向に x 軸、垂直方向に z 軸をとり、サーブを打つ人の足元に原点を取る。初期条件は $x = 0$, $z = h$ かつ $v_x = v_0 \cos \theta$, $v_z = v_0 \sin \theta$ となる。時刻 t での x, y 座標は (17.2) より、

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos \theta, \\ z(t) &= v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 + h. \end{aligned}$$

コート内に着地させるには、サーブボールがネットを超えるための条件と、飛距離が $2L$ を超えないための条件の2つを求めなければならない。まず1つ目の条件については「 x 座標が L のときの z 座標が H より大きい」と言い換えられる。飛距離が L のときの時刻 t_1 は $x(t)$ の式からわかり $t_1 = L/(v_0 \cos \theta)$ と求まる。時刻 t_1 における z 座標は、

$$z(t_1) = L \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{gL^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} + h > H.$$

これを少し整理すると、

$$-\frac{gL^2}{2} > (H - h - L \tan \theta) v_0^2 \cos^2 \theta.$$

右辺の符号に注意しよう。 $L \tan \theta$ は初速 $v_0 \sin \theta$ で上向きに時間 t_1 の間に等速直線運動して進む距離である。もし重力による妨げがなかったとしたらボールは高さ $L \tan \theta + h$ まで到達するわけである。したがってこの高さが H より低ければ、たとえ「重力がなかった」としてもネットを超えることができない。よって超えるためには少なくとも $H - h - L \tan \theta < 0$ でなければならない、

$$\frac{gL^2}{2(h + L \tan \theta - H)} < v_0^2 \cos^2 \theta,$$

が課せられる。

次に飛距離が $2L$ を超えないための条件は「 z 座標が 0 のときの x 座標が $2L$ より小さい」と言い換えられる．高度が 0 のときの時刻 t_2 は，2 次方程式

$$v_0 t_2 \sin \theta - \frac{1}{2} g t_2^2 + h = 0,$$

の解である．2 つの解のうち正の方を採用して

$$t_2 = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \theta}} \right].$$

時刻 t_2 における x 座標は，

$$x(t_2) = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{2g} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \theta}} \right] < 2L.$$

この条件を整理すると，

$$v_0^2 \cos^2 \theta < \frac{2gL^2}{2L \tan \theta + h},$$

となる．

以上をまとめると，

$$\frac{gL^2}{2(h + L \tan \theta - H)} < v_0^2 \cos^2 \theta < \frac{2gL^2}{2L \tan \theta + h},$$

となる．

§ 18. 摩擦力

この節では物体との間に生じる**摩擦** (friction force) による力を考える．摩擦力は物体どうしが擦れるときに生じる進行方向と逆向きに働く力である．物体の運動は摩擦力によって妨げられ減速し，ついには静止する．摩擦力は質点には働かず，大きさのある物体の接触面に働くものである．それゆえこの節では大きさのある物体について論じるが，その運動は質点の運動方程式で記述できるものとする．詳細な議論は剛体の章に委ねる．

ここでは次を満たすような摩擦力（あるいは物体）を対象とする：

1. 摩擦力は接触面積によらない．
2. 摩擦力は接触面にかかる力（垂直抗力）に比例する．
3. 動摩擦力は最大静止摩擦力よりも小さく速度に依存しない．

これらを **Amontons–Coulomb の法則** という．第一法則については，たとえば直方体の物体をどの面を接触面としても，働く摩擦力の大きさは変わらないことを意味する．第二法則については，接触面に向かって物体を押し付けると働く摩擦力が増大することを意味する．万力やバインダーのような挟むことで物体を固定する道具はこの事実を利用している．第三法則については用語の意味も含めて後述する．これら三法則は経験則として知られているが，例外的な物質や現象もたくさん知られていることに注意せよ．たとえば非常に速度の大きな物体の接触面に働く摩擦力などはこの範疇ではない．

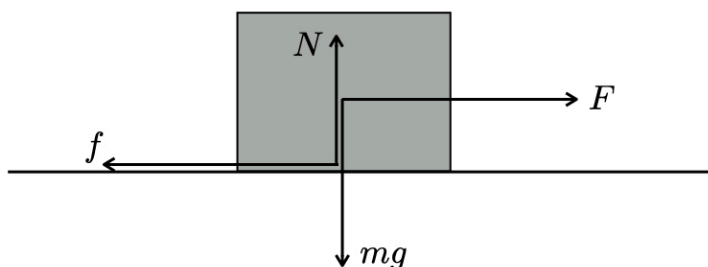
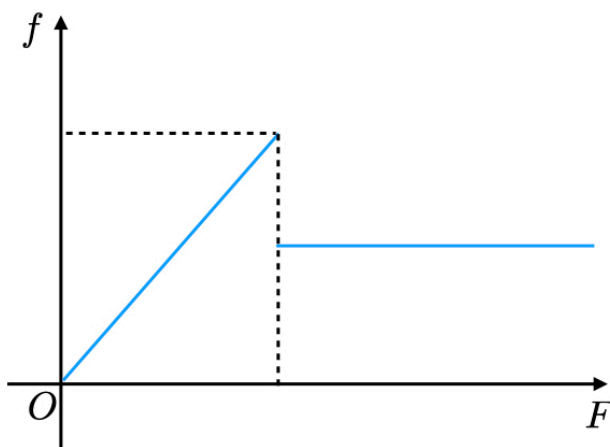


図 28 水平面に置かれた物体に働く摩擦力

まずは質量 m の物体が水平面に置かれた場合を考えよう．物体には一様重力 mg がはたらく．この物体の横から力 F で引っ張ると、もし摩擦力がなければ、運動方程式にしたがってその方向へ動く．しかし摩擦力 f があって物体は静止したままならば力 F と釣り合っている：

$$0 = F + f,$$

物体が静止しているときに働く摩擦力を**静止摩擦力**といい、必ず接触面がずれる方向に働く力と釣り合うように生じる．

図 29 物体を引っ張る力 F と摩擦力 f の関係

ところが力 F を大きくしていくとあるところで物体は動き出す．そのときの最大の静止摩擦力は、接触面に働く垂直抗力の大きさを N とすると、Amontons–Coulomb の第二法則から

$$f_{\max} = \mu N, \quad (18.1)$$

と与えられる． μ は比例定数で**静止摩擦係数**という．最大静止摩擦力を超えたところで物体は動き始め摩擦力は静止摩擦力から**動摩擦力**に変わる．動摩擦力の大きさは比例係数 μ' (動摩擦係数) として

$$f = \mu' N, \quad (18.2)$$

と表される。第三法則から μ' は物体の速度によらない定数で、静止摩擦係数 μ よりも小さい、

$$\mu' < \mu. \tag{18.3}$$

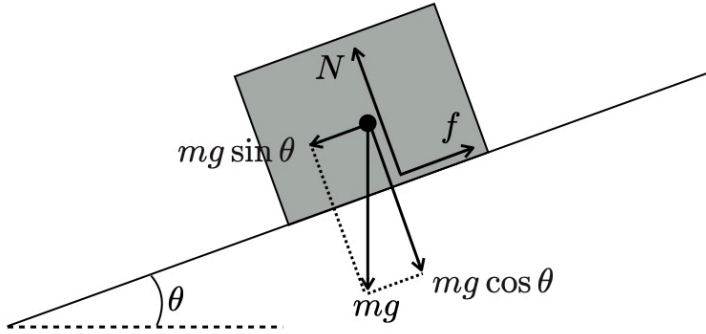


図 30 斜面上に置かれた物体に働く摩擦力

次に物体が斜面に対して静止している場合を考えよう。斜面に沿って座標軸 X を用意し (Y 軸はこれに垂直にとっておく), 斜面は θ だけ水平より傾いているとする。摩擦力を f とすると、運動方程式の X, Y 軸それぞれの成分は、

$$\begin{aligned} ma_X &= 0 = mg \sin \theta - f, \\ ma_Y &= 0 = N - mg \cos \theta. \end{aligned}$$

物体は Y 軸方向には運動しないので常に $N = mg \cos \theta$ が成り立つ。⁵⁾ 傾斜をきつくしていくとある角度から物体はすべり始める。この角度を θ_{\max} とすると最大静止摩擦力のとき、

$$f_{\max} = mg \sin \theta_{\max}, \quad N = mg \cos \theta_{\max},$$

となる。(18.1) へ代入して整理すれば、

$$\mu = \tan \theta_{\max}, \tag{18.4}$$

を得る。この結果を用いれば静止摩擦係数を滑り始める瞬間の角度 θ_{\max} から定めることができる。

すべり始めたあとの物体は

$$ma_X = mg \sin \theta_{\max} - f,$$

にしたがって運動する。ただし摩擦力は動摩擦力 $f = \mu' N$ に変わるので

$$a_X = g \left(\sin \theta_{\max} - \mu' \cos \theta_{\max} \right).$$

$\mu = \tan \theta_{\max}$ を用いて θ_{\max} を消去すれば、

$$a_X = \frac{\mu - \mu'}{\sqrt{1 + \mu^2}} g,$$

の一定加速度で斜面をすべり降りることがわかる。

⁵⁾ これは傾斜 (地面) による拘束条件である。 Y 座標方向の自由度はこの条件によりおちる。

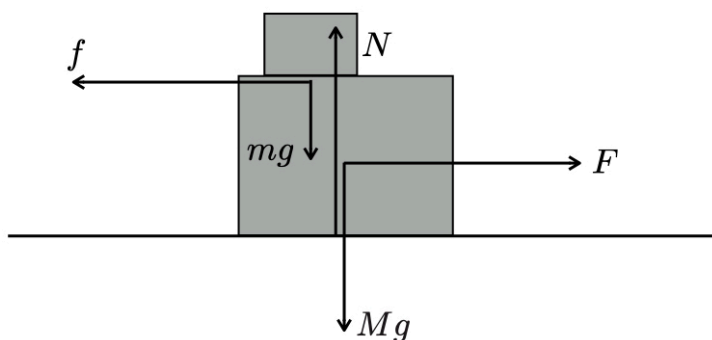


図 31 上に置かれた小物体との間に働く摩擦力

水平な地面におかれた質量 M の物体の上に質量 m の小物体を置く．物体と地面との間に摩擦は生じないが，物体と小物体の間には摩擦力が働くとする．このとき下の物体を水平方向に一定の力 F でひっぱることを考えよう．

上の小物体は下の物体と一緒に運動するか，ずれてしまうかの2通り考えられる．まず一緒に運動する場合は接触面でのずれはないから静止摩擦力が働いている．それぞれについての運動方程式を書き下すと，下の物体に関しては

$$\begin{aligned} Ma_X &= -f + F, \\ Ma_Y &= N - Mg - mg = 0, \end{aligned}$$

が成立する．ここで f は接触面にはたらく摩擦力の大きさ， N は地面から受ける垂直抗力である．上の小物体に関しては，

$$\begin{aligned} ma_x &= f, \\ ma_y &= n - mg = 0, \end{aligned}$$

が成立する．ここで n は下の物体から受ける垂直抗力である．小物体には F と同じ向きに摩擦力が働くことに注意せよ．

「一緒に運動する」とは加速度が共通ということである； $a_X = a_x$ ．したがって水平方向の運動方程式から接触面で働く摩擦力の大きさは

$$f = \frac{m}{m+M}F,$$

と求まる．小物体が物体の上でずれないための条件は $f \leq \mu n$ であることから，

$$F \leq \mu(m+M)g,$$

でなければならない．

上の小物体がずれる場合，接触面で働くのは動摩擦力 $f = \mu'n$ であり運動方程式は

$$\begin{aligned} Ma_X &= -\mu'n + F, \\ Ma_Y &= N - Mg - mg = 0, \end{aligned}$$

と,

$$\begin{aligned} ma_x &= \mu' n, \\ ma_y &= n - mg = 0, \end{aligned}$$

となる. 垂直方向の方程式から垂直抗力はそれぞれ $N = (m + M)g$, $n = mg$ と求まる. よって水平方向の運動方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned} Ma_X &= -\mu' mg + F, \\ ma_x &= \mu' mg, \end{aligned}$$

となり, それぞれ異なる大きさの加速度で運動することになる.

PROBLEM

PROBLEM1. 水平面に置かれた物体を水平から角度 θ の方向に大きさ F の力で引っ張ることを考える. 水平面と物体の間に摩擦力で物体が静止できるための力 F の上限を θ の関数として求めよ. また物体が一定速度で水平方向に運動するための力 F が最小となるときの θ の値を求めよ.

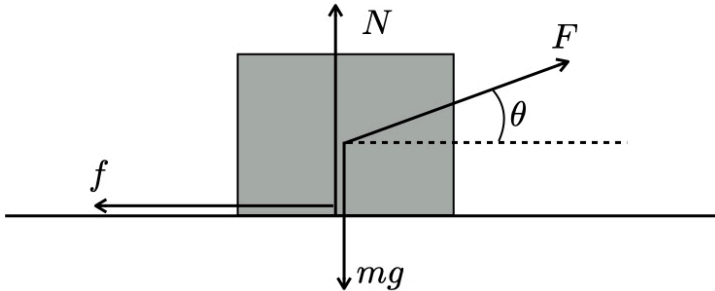


図 32

SOLUTION. まず物体が静止する場合の運動方程式は

$$\begin{aligned} ma_x &= 0 = F \cos \theta - f, \\ ma_y &= 0 = N - mg + F \sin \theta, \end{aligned}$$

ここで f は摩擦力, N は垂直抗力の大きさ. 方程式から摩擦力は水平方向反対向きに $f = F \cos \theta$, 垂直抗力は鉛直方向に $N = mg - F \sin \theta$ とわかる. 物体が動かないためには最大静止摩擦力を超えない $f \leq \mu N$ という条件から

$$F \cos \theta \leq \mu(mg - F \sin \theta),$$

これを整理すれば,

$$F \leq \frac{\mu mg}{\cos \theta + \mu \sin \theta} = \frac{\sin \delta}{\cos(\theta - \delta)} mg,$$

となる. ここで $\tan \delta = \mu$ である.

次に物体が一定速度で運動する場合の運動方程式は, 摩擦力が動摩擦係数を用いて $f = \mu' N$ より

$$\begin{aligned} ma_x &= 0 = F \cos \theta - \mu' N, \\ ma_y &= 0 = N - mg + F \sin \theta. \end{aligned}$$

よって先ほどの結果で $\mu \rightarrow \mu'$ と置き換えるだけで良い。すなわち、

$$F = \frac{\sin \delta'}{\cos(\theta - \delta')} mg, \quad \tan \delta' = \mu'.$$

F は $\cos(\theta - \delta) = 1$ のとき最小となる。 θ について解けば $\theta = \delta' = \tan^{-1} \mu'$ 。

§ 19. 空気抵抗

この節では**空気抵抗** (air resistance) を考慮して (大きさのある) 物体の運動方程式を立てよう。自転車に乗ると速くこぐほど強く風のきってゆくのがわかるように、速さが大きいと空気抵抗も大きくなる。⁶⁾

空気や液体といった流体を扱う場合は各物理量のスケールに慎重になる必要がある。大まかに言って、物体の運動による空気の乱れが少ないときには空気抵抗の大きさは物体の速さに比例する；比例定数を α として、

$$\mathbf{F}_R = -\alpha \mathbf{v}. \quad (19.1)$$

負符号は物体の速度と反対向きに力が働くことを意味する。乱れの少ないとは物体が十分ゆっくり運動するとき以外に、運動方向の物体の表面積が小さいとき、空気ではない粘性の大きい流体 (たとえば蜂蜜、溶岩など) のときも該当する。

他方で物体の運動によって空気の乱流が生じるような場合は空気抵抗は速度の2乗に比例するモデルの方が正確である。

$$\mathbf{F}_R = -\beta |\mathbf{v}| \mathbf{v}. \quad (19.2)$$

こちらのモデルが良いのは考えている速度が音速より遅いが乱流が生じるほど速い場合、物体のサイズが十分大きい場合、あるいは空気ではなく粘性係数が小さい流体の場合である。

では一様重力場での運動が空気抵抗によりどのように変わるかを見ていこう。まずは速度に比例する場合、運動方程式は、

$$m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha v_x \\ -\alpha v_y \\ -mg - \alpha v_z \end{pmatrix}, \quad (19.3)$$

と補正される。 z 成分の運動に注目すると、

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - \alpha \frac{dz}{dt}, \quad (19.4)$$

という微分方程式になっている。両辺を m でわって $e^{\frac{\alpha}{m}t}$ をかければ、

$$\frac{d^2 z}{dt^2} e^{\frac{\alpha}{m}t} + \frac{\alpha}{m} e^{\frac{\alpha}{m}t} \cdot \frac{dz}{dt} = -g e^{\frac{\alpha}{m}t}.$$

左辺は積の微分より、

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{\alpha}{m}t} \cdot \frac{dz}{dt} \right) = -g e^{\frac{\alpha}{m}t}.$$

⁶⁾ 一般には空気と物体の相対速度の関数であるが、ここでは簡単のため空気は静止しているとする。

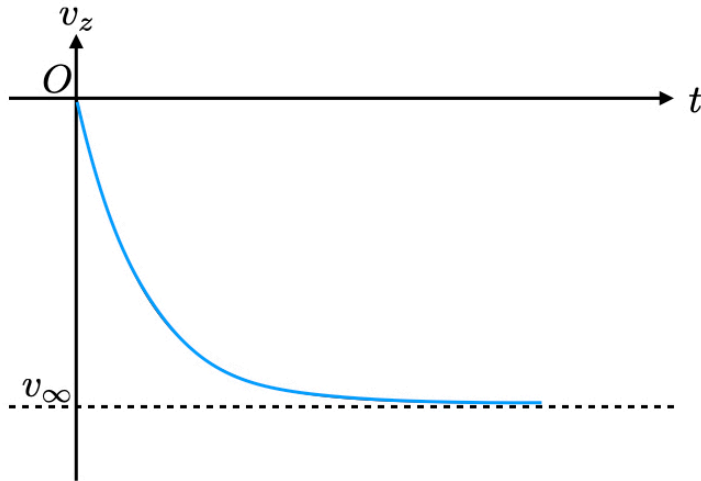


図 33 空気抵抗があるときの速度の時間変化

両辺は時間 t で積分できて、

$$e^{\frac{\alpha}{m}t} \cdot \frac{dz}{dt} = -g \frac{m}{\alpha} e^{\frac{\alpha}{m}t} + C.$$

C は初期条件から定まる定数. ゆえに、

$$v_z = -\frac{mg}{\alpha} + C e^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

初速が $t = 0$ で v_{z0} とすると C が定まって、

$$v_z = -\frac{mg}{\alpha} + \left(v_{z0} + \frac{mg}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha}{m}t}, \quad (19.5)$$

となって物体の速度の z 成分が得られた. 後ろの時間に関する項 $e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ は時間が経つにつれて急激に減少して 0 に近づく. このふるまいを詳しく調べよう.

たとえば上空から物体を落としたとすると、時間が経つにつれて落下速度 v_z は $-mg/\alpha$ に近づいて変化しなくなっていく. すなわち、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_z = -\frac{mg}{\alpha} =: v_\infty. \quad (19.6)$$

この速度 v_∞ を**終端速度** (terminal velocity) という. 物体は重力を受けて速度を増していき、それに伴い空気抵抗も大きくなる. そうして空気抵抗が重力に匹敵してくると速度の増加が鈍り、終端速度では重力と空気抵抗が完全に釣り合って速度の増加が止まる (ただし有限の時間では達成されない). 終端速度は空気抵抗の大きさのパラメータ α に反比例している. パラシュートを開くと安全に着地できるのは、比例係数 α が大きくなり終端速度が十分遅くなるからである.

速度を積分すれば時刻 t での高さが求まる. $t = 0$ で高さ $z = h$ にあったとすると、

$$z(t) - h = \int_0^t dt \left[-\frac{mg}{\alpha} + \left(v_{z0} + \frac{mg}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right]$$

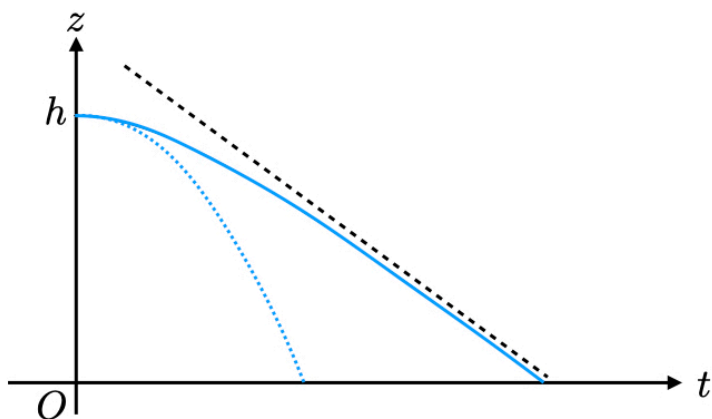


図34 空気抵抗があるときの高度の時間変化（青線）．放物線軌道（青点線）よりゆっくりと落下し漸近線（黒点線）に近づく．

積分は簡単に実行できて、

$$z(t) = h + v_{\infty}t - \frac{m}{\alpha}(v_{z0} - v_{\infty})(e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1), \quad (19.7)$$

となる．グラフ（図34）をみると、はじめの方は放物線のように落下し始めるがやがて直線に漸近する．その漸近直線が終端速度での等速落下に対応している．

地表に到達する時刻は $z(t) = 0$ より、

$$0 = h + v_{\infty}t - \frac{m}{\alpha}(v_{z0} - v_{\infty})(e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1), \quad (19.8)$$

を解くことで求まる．これは t について陽に解くことができないが、各パラメータを具体的に与え数値的に求められる．

次に空気抵抗が速度の二乗に比例する場合を議論しよう．さきほどと同様に初期条件は高さ h から初速 0 で落下させるものとし、 x, y 方向の運動は考えない． z 成分の運動方程式は、

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg + \beta \left(\frac{dz}{dt} \right)^2. \quad (19.9)$$

ここで運動のあいだ $\dot{z} < 0$ のために絶対値の記号を外すときに -1 倍が現れることに注意する． $v_z = \dot{z}$ とおき変数分離をすると、

$$\frac{-1}{g - \frac{\beta}{m}v_z^2} \frac{dv_z}{dt} = 1.$$

両辺を 0 から t までで積分すると、

$$t = \frac{1}{g} \int_0^t dt \frac{-1}{1 - \frac{\beta}{mg}v_z^2} \frac{dv_z}{dt}.$$

変数変換 $\sqrt{\beta/mg}v_z(t) = V$ を行えば,

$$t = \sqrt{\frac{m}{\beta g}} \int_0^{V(t)} dV \frac{1}{V^2 - 1} = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{m}{\beta g}} \int_0^{V(t)} dV \left(\frac{1}{1+V} + \frac{1}{1-V} \right).$$

ここでもし $1 < |V|$ すなわち $|v_z| > \sqrt{mg/\beta}$ となることがもしあればこの積分は特異点をもつ。しかしそのようなことは起こらないことが終端速度を求めることでわかる。終端速度に近づくと重力と空気抵抗がつり合い加速度が 0 に近づくことから,

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 = -mg + \beta v_\infty^2.$$

これより終端速度が $v_\infty = \pm \sqrt{mg/\beta}$ と求まる。今は落下なので $v_\infty = -\sqrt{mg/\beta}$ でありこれを超えることはない。それゆえ終端速度がちょうど $V = -1$ に対応するので積分範囲は必ず $-1 < V \leq 0$ であり安心して積分を実行できる。初等的な積分計算より,

$$t = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{m}{\beta g}} \left[\ln(1+V) - \ln(1-V) \right]_0^{V(t)} = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{m}{\beta g}} \ln \frac{1+V}{1-V}.$$

両辺を $-2\sqrt{\beta g/m}$ 倍して \ln を取り除くと,

$$e^{-2\sqrt{\beta g/m}t} = \frac{1+V}{1-V}.$$

$v_z = \sqrt{mg/\beta}V$ についてとけば,

$$v_z = -\sqrt{\frac{mg}{\beta}} \tanh \left(\sqrt{\frac{\beta g}{m}} t \right) = v_\infty \tanh \left(\sqrt{\frac{\beta g}{m}} t \right). \quad (19.10)$$

双曲線関数 $\tanh x$ は $x \rightarrow \infty$ の極限で 1 となるので、速度は $t \rightarrow \infty$ で $v_z \rightarrow v_\infty$ となり終端速度に漸近する (いま速度は z 軸方向に対し常に逆向きなので -1 がつくことに注意)。 $v_z = \dot{z}$ と初期条件 $t = 0$ で $z(0) = h$ より,

$$z(t) - h = v_\infty \int_0^t dt \tanh \left(\sqrt{\frac{\beta g}{m}} t \right).$$

$\tanh x = \sinh x / \cosh x = (\cosh x)' / \cosh x$ なので合成関数の微分を逆に用いて,

$$z(t) = h + v_\infty \sqrt{\frac{m}{\beta g}} \ln \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{\beta g}{m}} t \right) \right]. \quad (19.11)$$

地表に到達する時刻は $z(t) = 0$ より,

$$0 = h - \frac{m}{\beta} \left[\ln \cosh \left(\sqrt{\frac{\beta g}{m}} t \right) \right],$$

を解くことで求まる。今度は解析的に解けて,

$$t = \sqrt{\frac{m}{\beta g}} \operatorname{arccosh} \left(e^{\beta h/m} \right). \quad (19.12)$$

ここで $\operatorname{arccosh}$ は cosh の逆関数. 以上の結果は前の結果と比べると表式の見た目はだいぶ違うが, 終端速度に漸近するという本質的なふるまいは速度に比例する場合と変わらない.

§ 20. 等速円運動

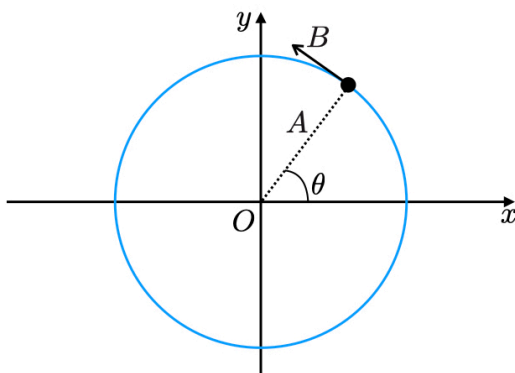


図 35 等速円運動の軌道

質点の**等速円運動**を議論しよう. 円運動では質点と円の中心の距離 A は時間によらず一定であり, さらに運動はある平面内に限られる. この平面内に x 軸と y 軸とを設置し, xy 平面と垂直な z 軸方向の運動は考えない. 速さを B として以上のことを式に表せば

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = A, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = B, \quad z = 0, v_z = 0, \quad (20.1)$$

が運動の間常に成り立っていなければならない. 一つ目の条件式は三角関数によって置き換えることが可能である. つまり実パラメータ θ によって

$$x = A \cos \theta, \quad y = A \sin \theta, \quad (20.2)$$

と表すと, 常に一つ目の条件式は満足する. このように二つ以上の変数をそれより少ない個数の変数によって表すことを**媒介変数表示** (parameterization), またはパラメータ表示という. 変数の個数が減ることは系の自由度が落ちることと同義であった. いま等速円運動の場合には θ という一つの自由度しかもっていない.

円運動においてこの θ というパラメータは質点がどれだけ回転したかという角度を表している. はじめ物体が位置 $(A, 0, 0)$ にいたとする. これは $\theta = 0$ に対応している. 質点は時間とともに中心原点, 半径 A の円周を動く. 時刻 t での角度 $\theta = \theta(t)$ を求めよう. 媒介変数表示の式で時間微分をとると合成関数の微分より,

$$v_x = -A\dot{\theta} \sin \theta, \quad v_y = A\dot{\theta} \cos \theta. \quad (20.3)$$

等速であるという条件式に代入して,

$$A^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + A^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta = A^2 \dot{\theta}^2 = B^2.$$

$A \neq 0$ だから $\dot{\theta} = \pm B/A$ となる. θ は時間とともに増加するとして $\dot{\theta} = B/A =: \omega$ を採用する. この ω は単位時間あたりの角度の増加率であるから, 回転の**角速度** (angular velocity) という. 積分から直ちに $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ だがはじめの角度は 0 にあったとしているので $\theta_0 = 0$. 結局,

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega t, & y &= A \sin \omega t, \\ v_x &= -\omega A \sin \omega t, & v_y &= \omega A \cos \omega t. \end{aligned} \quad (20.4)$$

もう一度, 時間微分をして加速度を求めると,

$$a_x = -\omega^2 A \cos \omega t, \quad a_y = -\omega^2 A \sin \omega t. \quad (20.5)$$

xy 平面内での運動方程式は,

$$m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = -m\omega^2 A \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}.$$

すると等速円運動する質点にはたらいている力の大きさというのは,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega^2 A, \quad (20.6)$$

を満たしており, 力の大きさ F は角度 θ によらず一定の値 $m\omega^2 A$ である. またその向きは物体の位置ベクトルの逆向きであり速度の向きと直交 (内積が 0) している. すなわち力の向きは常に円軌道の中心を向いている. このような力を**向心力** (centripetal force) という. 向心力の存在が円運動するための条件である. たとえば物体に紐を取り付けてくるくると手で振り回す (たとえばハンマー投げやうなり笛など) とき, 中心からの距離は紐の長さで一定になっており, 紐からの張力が向心力となって等速円運動する.

さらに等速円運動では特別な関係が成り立っている. 速度の大きさは $v = \omega A$ であり, 加速度の大きさは $a = \omega^2 A$ である. この 2 つから $a = \omega v = v^2/A$ が導かれる.

一周するのに要する時間は距離/速さから,

$$T = \frac{2\pi A}{v} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

これを円運動の**周期** (period) という. 周期で質点の位置を表すと,

$$x = A \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad y = A \sin \frac{2\pi t}{T},$$

となる.

PROBLEM

PROBLEM1.

円錐を逆さにした斜面を考える。そして底から高さ h の面で、面に沿って水平方向へ質量 m の質点を初速 v_0 で射出する。一様重力場があるとき質点が高さ h のところで斜面に沿って等速円運動するための初速に対する条件を求めよ。ただし斜面の傾きを α とする。

SOLUTION. 円錐の中心、高さ h の地点を原点に取り、水平面を xy 平面とし、鉛直方向に z 軸をとる。円運動の半径は $A = h \sin \alpha$ である。初期条件が $t = 0$ で $x = A, y = 0$ と $v_x = 0, v_y = v_0$ となるように軸をとる。

質点に働く力は重力 $-mge_z$ と斜面から受ける垂直抗力 \mathbf{N} である。円運動の間に高さ h で一定でなければならないので、鉛直方向に加速度は 0 である。したがって、 $mg = N \sin \alpha$ 、あるいは垂直抗力の大きさが $N = mg / \sin \alpha$ と求まる。等速円運動するためには向心力が必要であるが、今の場合それは $F = N \cos \alpha = mg \cot \alpha$ が相当する。円運動の角速度は $\omega = \sqrt{F/mA} = \sqrt{g/(h \sin \alpha)}$ である。したがって (20.4) に現れるパラメーターがすべて得られた。速度は、

$$v_x = -\omega A \sin \omega t, \quad v_y = \omega A \cos \omega t.$$

である。 $t = 0$ のとき初期条件から、

$$v_0 = \omega A = \sqrt{gh \cos \alpha}$$

である。すなわちこの初速を与えれば質点は斜面で等速円運動を続ける。

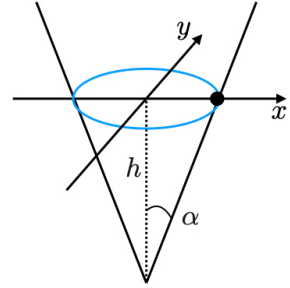


図 36 円錐斜面上での円運動

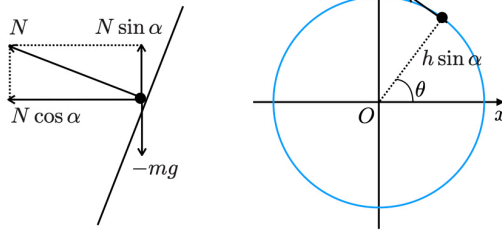


図 37

PROBLEM2. ターンテーブルの中心から R 離れた場所に質量 m の物体が置かれている。一定の角速度 ω でターンテーブルを回転させるとき、物体がターンテーブル上に静止し続けるための ω の条件を求めよ。ただし接触面での静摩擦係数を μ とする。

SOLUTION. 物体は半径 R で等速円運動している。物体に働く力は重力 mg と摩擦力 f のみなので、向心力として摩擦力が働く。角速度 ω での等速円運動なので加速度は $a = \omega^2 R$ である。したがって物体の運動方程式は

$$ma = m\omega^2 R = f, \quad 0 = N - mg,$$

物体とターンテーブルの接触面がずれないためには摩擦力が最大静摩擦力 μN を超えないことが必要である：

$$m\omega^2 R \leq \mu mg.$$

これを整理して

$$\omega \leq \sqrt{\frac{\mu g}{R}},$$

となる。このことから、物体がターンテーブルの縁側によっているときほどゆっくりと回さなければならぬことがわかる。

PROBLEM3. 質量 m の自動車が半径 R のカーブを曲がることを考える。自動車は等速 v でカーブを走行するとき、自動車が滑ることなく安全に曲がれるための v の条件を求めよ。ただしタイヤと地面の間の静止摩擦係数を μ とする。

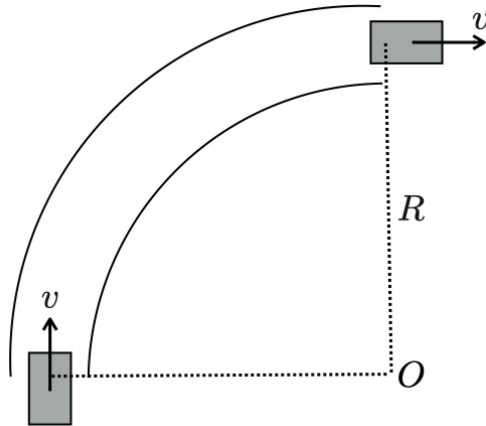


図 38

SOLUTION. 自動車のカーブ走行は半径 R の等速円運動とみなせる。自動車に働く力は重力 mg と摩擦力 f のみなので、向心力として摩擦力が働く。速度 v なので加速度は $a = v^2/R$ である。したがって自動車の運動方程式は

$$ma = m \frac{v^2}{R} = f, \quad 0 = N - mg,$$

自動車がカーブからずれないためには摩擦力が最大静止摩擦力 μN を超えないことが必要である：

$$m\omega^2 R \leq \mu mg.$$

これを整理して

$$v \leq \sqrt{\mu g R},$$

となる。このことから、自動車が半径の小さい急カーブほど速度を落として曲がらなければならないことがわかる。

§ 21. 非慣性系

ここまで観測者は慣性の法則にしたがって運動する慣性系であると仮定してきた。つまり別の慣性系にいる観測者 Bob からは観測者 Alice は等速直線運動（または静止）しているよ

うに見える。もし Bob からみて Alice が非慣性運動をしている場合、Alice の観測する質点の運動方程式はどのようなになるだろうか。

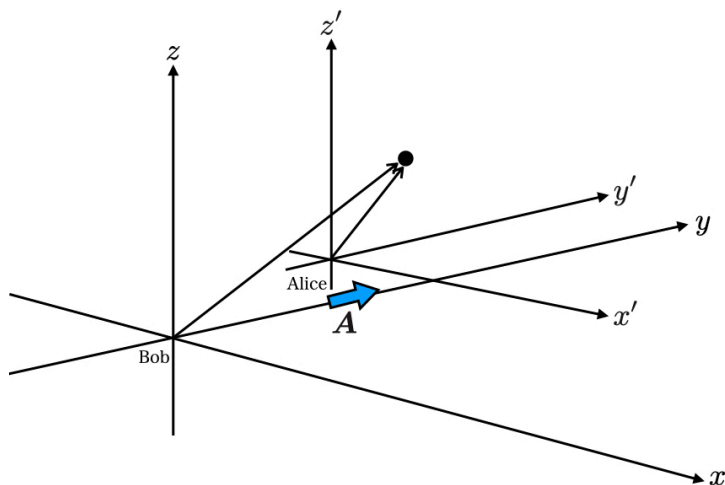


図 39 慣性基準系 Bob と非慣性系 Alice

Bob を慣性基準系とし、Alice は Bob からみてある加速度 \mathbf{A} で運動しているとしよう。ただし Alice は座標軸の向きは変えずに並進運動のみしている。Bob からみた質点の座標を \mathbf{r} 、Alice の座標を \mathbf{R} とし、Alice からみた質点の座標は \mathbf{r}' とする。すると次が任意の時刻で成立する：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}. \quad (21.1)$$

Bob から見た質量 m の質点の運動方程式を

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

とする。ただし $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ 。上の関係式を代入すれば Alice から見た運動方程式

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A}, \quad (21.2)$$

となる。ここで $\mathbf{a}' = \ddot{\mathbf{r}}'$ 、 $\mathbf{A} = \ddot{\mathbf{R}}$ 。Alice から質点の運動を見るとあたかも力 $-m\mathbf{A}$ が質点に働いているかのように見える。しかしこの項は Alice が非慣性運動していることに由来する**見かけの力** (fictitious force) である。この見かけの力は特に**慣性力**と呼ばれる。Alice から見た質点の運動方程式は慣性力を加えることで、あたかも Alice が慣性系であるかのように扱うことができる。

非慣性系の身近な例としてエレベーターを取り上げる。エレベーターが上向きに加速度 A で上昇しており、中に置かれた質量 m の質点も一緒に上昇している。エレベーターの外にいる Bob (慣性系) から見ると質点は加速度 A で上昇運動している。したがってエレベーターを上向きに引っ張っているワイヤーの張力を T とすれば運動方程式は

$$mA = T,$$

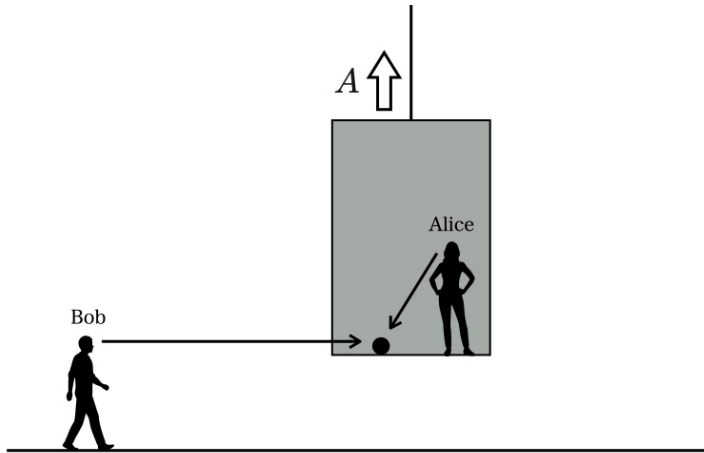


図 40 エレベーター内の質点

が成り立っている．他方でエレベーターの中にある Alice から見ると質点には慣性力 mA が下向きに働いていて

$$ma' = T - mA = 0,$$

となる．つまり Alice から見ると質点は慣性力と張力が釣り合って静止している，ように見える．

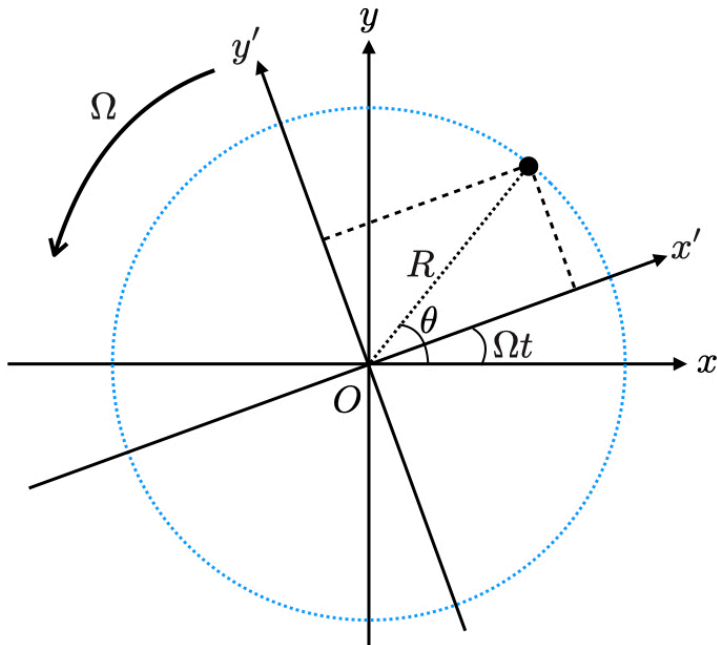


図 41 回転座標系

次に Bob と Alice は同じ場所にいるが Alice は一定角速度 Ω で回転している場合を考えよう。これを**回転座標系**という。簡単のため質点の運動は水平面に限られるとし平面上で議論する。Bob から見て静止している質点の座標を (x, y) とする。またはパラメータ表示して $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$ とする。Alice から見ると、時刻 t での座標は

$$\begin{aligned}x' &= R \cos(\theta - \Omega t) = x \cos \Omega t + y \sin \Omega t, \\y' &= R \sin(\theta - \Omega t) = y \cos \Omega t - x \sin \Omega t,\end{aligned}$$

である。 $\dot{x} = \dot{y} = 0$ であることに注意して、Alice から見た質点の速度と加速度を計算すると、

$$\begin{aligned}v'_x &= R\Omega \sin(\theta - \Omega t) = \Omega(-x \sin \Omega t + y \cos \Omega t), \\v'_y &= -R\Omega \cos(\theta - \Omega t) = \Omega(-y \sin \Omega t - x \cos \Omega t),\end{aligned}\tag{21.3}$$

と

$$\begin{aligned}a'_x &= -R\Omega^2 \cos(\theta - \Omega t) = \Omega^2(-x \cos \Omega t - y \sin \Omega t), \\a'_y &= -R\Omega^2 \sin(\theta - \Omega t) = \Omega^2(-y \cos \Omega t + x \sin \Omega t),\end{aligned}\tag{21.4}$$

となる。速度の向きは時計回りに大きさ $R\Omega$ であり、加速度の大きさは原点方向に大きさ $R\Omega^2$ である。よって Alice から見ると質点は向心力 $F = R\Omega^2$ 、速さ $R\Omega$ の等速円運動をしているように見える。

では Bob から見て角速度 Ω で反時計回りに等速円運動する質点の運動を、回転座標系の Alice から観測すれば静止して見えるはずである。Bob から見て質点の運動方程式は、

$$\begin{aligned}ma_x &= -m\Omega^2 R \cos \Omega t = F_x, \\ma_y &= -m\Omega^2 R \sin \Omega t = F_y,\end{aligned}\tag{21.5}$$

力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ は大きさ $F = m\Omega^2 R$ の向心力である。Alice から見た速度と加速度を、 x, y が時間依存する一般の函数として計算すると

$$\begin{aligned}v'_x &= v_x \cos \Omega t + v_y \sin \Omega t + \Omega(-x \sin \Omega t + y \cos \Omega t), \\v'_y &= v_y \cos \Omega t - v_x \sin \Omega t + \Omega(-y \sin \Omega t - x \cos \Omega t),\end{aligned}\tag{21.6}$$

と

$$\begin{aligned}a'_x &= a_x \cos \Omega t + a_y \sin \Omega t \\&\quad + 2\Omega(-v_x \sin \Omega t + v_y \cos \Omega t) + \Omega^2(-x \cos \Omega t - y \sin \Omega t), \\a'_y &= a_y \cos \Omega t - a_x \sin \Omega t \\&\quad + 2\Omega(-v_y \sin \Omega t - v_x \cos \Omega t) + \Omega^2(-y \cos \Omega t + x \sin \Omega t),\end{aligned}\tag{21.7}$$

となる。これらの式で $x = R \cos \Omega t$, $y = R \sin \Omega t$ と $v_x = -R\Omega \sin \Omega t$, $v_y = R\Omega \cos \Omega t$ であることから、Alice の観測する速度は $v'_x = v'_y = 0$ となり、たしかに Alice から見れば質点は静止して見えることがわかる。運動方程式は

$$\begin{aligned}ma'_x &= F_x \cos \Omega t + F_y \sin \Omega t + mR\Omega^2, \\ma'_y &= F_y \cos \Omega t - F_x \sin \Omega t.\end{aligned}$$

今 $F_x = -F \cos \Omega t$, $F_y = -F \sin \Omega t$ なので,

$$\begin{aligned} ma'_x &= -F + mR\Omega^2, \\ ma'_y &= 0. \end{aligned}$$

$F = m\Omega^2 R$ なので $a'_x = a'_y = 0$ となる. 特に運動方程式の x' 成分では慣性力 $mR\Omega^2$ と向心力 F が釣り合っている. 回転座標系において向心力と反対向きに生じる慣性力を特に遠心力 (centrifugal force) という. 等速円運動する質点と一緒に回転する観測者からはあたかも向心力と遠心力が釣り合って静止しているように見える.

3次元の非慣性系の回転運動も含めた一般の議論は剛体の章に譲る.

PROBLEM

PROBLEM1. 一定加速度 \mathbf{A} で水平方向に直線運動する箱を考える. 箱の中には天井からひもで吊るされた質量 m の物体がある. 物体は箱の中で静止しているときひもの振れ角を求めよ. ただし重力加速度を g とする.

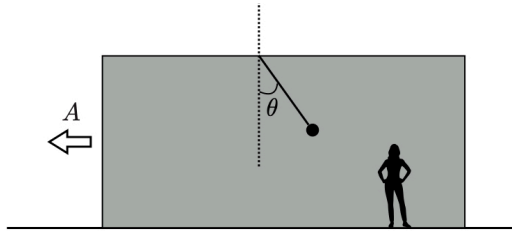


図 42

SOLUTION. 箱の中の物体に働く力は重力 mg とひもから受ける張力 T である. 箱の中から観測する場合は箱の進行方向と逆向きに慣性力 mA も働く. 物体は静止しているから, 水平方向と鉛直方向の運動方程式は,

$$\begin{aligned} ma_x = 0 &= T \sin \theta - mA, \\ ma_y = 0 &= T \cos \theta - mg. \end{aligned}$$

ここで x 軸は箱の進行の向き, y 軸は鉛直上向きにとっており, θ はひもと y 軸のなす角である. これらからただちに

$$\theta = \arctan \frac{A}{g}.$$

この現象はたとえば電車のつり革などで見られる.

§ 22. 対称性

この節では物理学における対称性 (symmetry), あるいは不変性について議論する.

初等幾何学における対称性とは図形に対し何らかの数学的操作を行ってもその図形が不変に保たれることである。たとえば正三角形は 60° の回転に対して不変である。また鏡に移す変換（鏡映変換）に対しても不変である。このとき正三角形は（3 回の）回転対称性と鏡映対称性を持つ、という。しかし一般の三角形ではこれらの対称性は持たない。

物理においては物理法則や運動方程式に対する変換における対称性が重要な意味を持つことがある。

[パリティ対称性]

まず鏡映変換について考えよう。物理学においては**パリティ変換** (parity transformation) という。パリティ変換は空間に設定された座標軸の 1 つを反転させる変換で、

$$x_i \mapsto -x_i, \quad (22.1)$$

と表せる。特に 3 次元空間では 3 つの座標軸を同時に反転させる変換と等価であり、位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto -\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}, \quad (22.2)$$

と変換される。⁷⁾

パリティ変換のもとで運動の法則がどのように変わるかを調べよう。運動方程式の左辺では加速度が $\mathbf{a} \mapsto -\mathbf{a}$ と反転する。他方右辺の力はその種類によって変換の仕方が変わる。一様重力 $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ の場合は重力加速度が反転し、空気抵抗 $\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v}$ の場合は速度が反転する。いずれの場合も運動方程式は不変となり、**パリティ対称性**を有する。

基本的にパリティ変換ではベクトル量は全て反転することになる。しかし外積により作られるベクトルは反転しない。たとえば $\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ という量を定義すると、位置と速度両方からくる負号がキャンセルし不変となる。パリティ変換で反転するベクトルを**極性ベクトル** (polar vector), 反転しないベクトルを**軸性ベクトル** (axial vector) または**擬ベクトル** (pseudo vector) という。本稿では擬ベクトルの呼称を採用するが慣習的に「軸性ベクトル」がふさわしい場合はそちらを優先する。ベクトル以外の一般の物理量について、パリティ変換で反転する場合**パリティ奇** (odd) といい、反転しない場合は**パリティ偶** (even) という。このように特定の変換に対するふるまいの違いで物理量を分類することがしばしばある。

[時間反転対称性]

次に**時間反転変換** (time reversal transformation) について考えよう。時間反転変換は文字通り時間の符号を反転する変換である：

$$t \mapsto -t. \quad (22.3)$$

⁷⁾ この表記は実は正しくない。パリティ変換で変換されるのは座標軸であってベクトルではない。したがって \mathbf{r} 自体は不変で、展開する基底が変換され、それに伴い成分の符号が反転すると解釈すべきである。

物体の位置ベクトル \mathbf{r} は不変だが、逆再生のように軌道を逆向きに運動する。そのため速度 \mathbf{v} は微分の定義からも明らかなように反転し、加速度は反転しない。力は個別に議論する必要がある。一様重力 $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ の場合は不変だが、空気抵抗 $\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v}$ の場合は速度が反転する。そのため一様重力中の運動方程式は不変となるが、空気抵抗がある場合は不変とならない。

現実世界のほとんど全ての現象は時間反転に対し対称ではない。たとえばガラス容器を割ってしまうと（力学的に）二度と修復することはできない。現実には時間は不可逆であるが Newton 方程式では対称なことがある。これは Newton 方程式が質点に関する運動方程式であり、空気のような連続体を対象にできないことに由来する。現実世界における時間の不可逆性は未解決問題である。

[Galilei 対称性]

Galilei の相対性原理では全ての慣性系で物理法則は同じでなければならなかった。Galilei 変換で位置ベクトルは

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t - \mathbf{R}, \quad (22.4)$$

と変換される。ここで \mathbf{V} は二人の観測者の相対速度、 \mathbf{R} は初期時刻での相対位置ベクトルである。微分することにより速度ベクトル、加速度ベクトルの変換則は、

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}, \quad \mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}' = \mathbf{a}, \quad (22.5)$$

とわかる。

一様重力場 $m\mathbf{g}$ は Galilei 不変であり運動方程式は不変である。しかし空気抵抗は $\alpha\mathbf{v} \mapsto \alpha\mathbf{v}' = \alpha(\mathbf{v} - \mathbf{V})$ となり Galilei 不変ではない。ただしこの場合は系全体を見ると空気の Galilei 変換を忘れていない。別の慣性系へ移ると空気も \mathbf{V} で動いて見え空気抵抗の大きさも変わってくる（空気と物体の相対速度に比例する）。それを加味すればやはり運動方程式は不変となる。

Galilei 変換に対する不変性は Newton 力学においては必ず成立する。しかし電磁気学の章で解説するが Galilei 対称性が破れてしまう現象が自然界には存在する。この問題は Einstein の特殊相対性理論により解決される。

[その他の対称性]

最後に物理学において重要なその他の対称性を紹介する。

Galilei 変換の特殊な場合である $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{R}$ を空間の並進変換という。並進変換は時間に対しても同様に $t \mapsto t' = t + T$ を考えられる。また座標軸の回転変換を考えられる。この3つの変換は解析力学の章にて Noether の定理により保存則と密接な関係があることがわかる。

時間を1つの座標とみなして4次元空間での回転変換に対する対称性を Lorentz 対称性という。Lorentz 対称性は自然界がもつ基本的な対称性でありすべての物理法則はこの対称性をもたなければならない。つまり Lorentz 対称性が運動法則よりも根源的に物理法則を支配す

ると言える.

電磁気学ではゲージ変換と呼ばれる方程式に影響を与えない程度の函数の不定性が存在する. ゲージ対称性は相対論的量子力学において Lorentz 対称性同様に理論を厳しく制限する. 素粒子論ではゲージ変換に対する対称性は電磁場以外にも拡張され 1 つの指導原理となっている. 対称性のより深い議論は各章に委ねる.

§ 23. エネルギー保存則

物体の運動の間一定値をとる量を**保存量** (conservative quantity) と言い, それは運動方程式に解を与える上でとても重要な役割を果たす. 保存量は一般に物体の位置や速度, 時間などの函数として定義される: $Q = Q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. そして保存量 Q は初期条件が与えられれば値が定まり, 任意の時刻でもその値をとり続ける. 任意の時刻での位置や速度は保存量 Q によって関係付けられ, 運動方程式の解を与える助けになる. たとえば速度の大きさについて解いて $v = v(\mathbf{r}, Q, t)$ のように表せられる.

ある物理量 Q が保存量とは,

$$\frac{d}{dt} Q = 0, \quad (23.1)$$

となることである. 両辺を初期時刻 t_0 から任意の時刻 t まで時間積分すれば, $Q(t) = Q(t_0)$ となってたしかに時間によらない保存量となっている. 有名な保存量としてはエネルギー, 運動量, 角運動量などがある.

この節では保存量の中でもとりわけ重要なエネルギーを議論する. エネルギーは経験上あらゆる物理現象において保存量となることが知られており, その保存則は単に運動方程式を解く手助けに止まらない普遍的な概念である. 原子・分子などのミクロな世界から天体・宇宙までのマクロな世界のさまざまなスケールにおいて, 力学を超えた熱力学・電磁気学・流体力学・相対性理論・量子力学などの諸分野でも成立する物理法則である.

話を簡単にするために一次元運動を考える.⁸⁾ Newton の運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F, \quad (23.2)$$

の両辺に速度の定義,

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (23.3)$$

をかけてはじめの時間 t_0 から任意の時刻 t までの範囲で積分すると,

$$\int_{t_0}^t dt m \frac{dv}{dt} \cdot v = \int_{t_0}^t dt F \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (23.4)$$

ここで積の微分法より,

$$\frac{d}{dt} v(t)^2 = \frac{d}{dv} v^2 \cdot \frac{dv}{dt} = 2v \cdot \frac{dv}{dt},$$

⁸⁾ 一次元運動では粒子 1 コの自由度は 1 なので位置や速度はベクトルを使う必要がなくなり, 表現は簡潔になる.

であるから前式の左辺は、

$$(\text{l.h.s.}) = \frac{m}{2} \int_{t_0}^t dt 2 \frac{dv}{dt} \cdot v = \frac{1}{2} mv(t)^2 - \frac{1}{2} mv_0^2. \quad (23.5)$$

ただし v_0 は時刻 t_0 での速度. 一方右辺の積分で力 F の原始関数を $-V(x)$ として、

$$F = -\frac{dV}{dx}, \quad (23.6)$$

と書ける仮定すると、

$$(\text{r.h.s.}) = \int_{t_0}^t dt F \cdot \frac{dx}{dt} = \int_{x_0}^{x(t)} dx \frac{dV}{dx} = V(x(t)) - V(x_0), \quad (23.7)$$

となる. ここで x_0 は時刻 t_0 での位置である.

以上のことを整理して、左辺に任意の時刻 t の量を、右辺に初期時刻 t_0 の量を分けると、

$$\frac{1}{2} mv(t)^2 + V(x(t)) = \frac{1}{2} mv_0^2 + V(x_0), \quad (23.8)$$

が得られる. この式は左辺の任意の時刻での $mv^2/2 + V(x)$ という量が初期値と等しく、一定値であることを示している. そこで左辺の値を

$$E := \frac{1}{2} mv^2 + V(x), \quad (23.9)$$

と定義すると、 E は

$$\frac{d}{dt} E = 0, \quad (23.10)$$

を満たす保存量である. この E を**エネルギー** (energy) といい、(23.8) を**力学的エネルギー保存則**という.

エネルギーの定義の第1項は速度の関数で、**運動エネルギー** (kinetic energy) という. 運動エネルギーは質点の運動の「勢い」と解釈できる. 第2項は位置の関数で、**ポテンシャルエネルギー** (potential energy), または位置エネルギーという. 一般にポテンシャルエネルギー V は色々な物理量に関係するが、たいていは V は力を及ぼす源からの距離に依存する.

自明な例として何の力も受けていない静止した物体のエネルギーは0である. また慣性の法則にしたがって等速直線運動する物体のエネルギーは速さを v とし、 $E = mv^2/2$ となる.

では一様重力場ではどうか. 一様な重力場では物体に力 mg が作用するのでポテンシャルエネルギーの項:

$$V(z) = mgz + C, \quad (23.11)$$

が現れる (鉛直上向きに z 軸を設定した). ここで C は積分定数であるが、これはポテンシャルエネルギーの原点を選ぶことで定められる. 大抵の場合は物体の高さ z と同じにとり $C = 0$ とする. 一様重力中のエネルギーの表式からエネルギーの理解を深めよう.

地上から高さ h のところで (地上に対して) 静止する物体を考える. エネルギーは $E = mgh$ と与えられる. 任意の時刻 t でのエネルギーの表式は、

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + mgh, \quad (23.12)$$

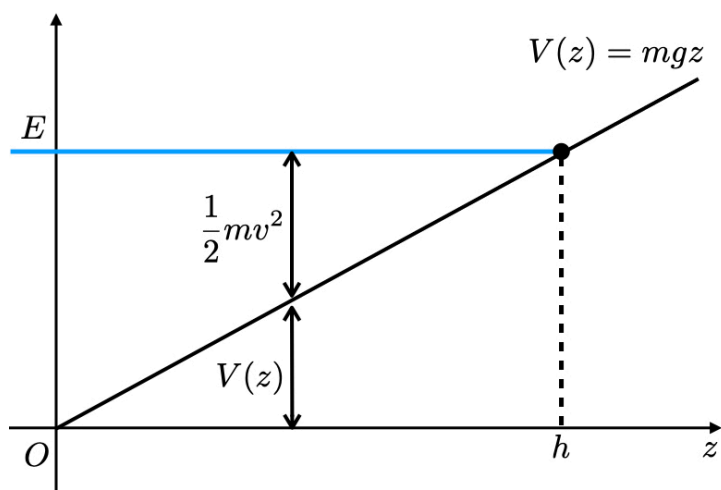


図 43 一様重力場中のエネルギー保存則.

z は時刻 t での物体の地上からの高さである。質点はすぐに地球の重力に引かれて落下し始め、速度を得て運動エネルギーが増加していく。一方ポテンシャルエネルギーは、地上との距離が縮まるにつれて減少していく。エネルギーの総量は一定であるから、ポテンシャルエネルギーの減少分が運動エネルギーの増加分に変換されたと言える。物体の速度に変化が生じた場合、その前後ではエネルギーのやりとりが起こっており、その収支は必ず ± 0 である。

物体を重力に逆らって投げ上げるとある高さまでいくと落下に転じる。最高点では鉛直方向の速度は 0 となり運動エネルギーも 0 となっている。最高点はちょうどエネルギー一定の直線とポテンシャル $V(z)$ の交点に相当する。

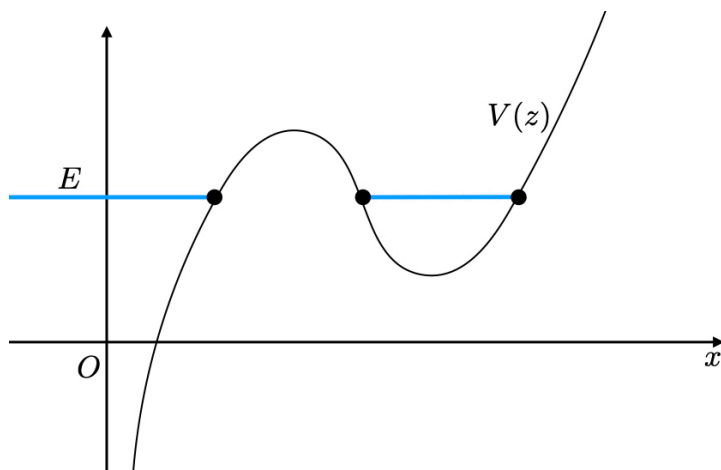


図 44 エネルギー保存則により青線の領域でのみ物体は運動が許される。

一般に速度が実数であることから不等式

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - V \geq 0, \quad (23.13)$$

が成り立つ。つまり質点はポテンシャルエネルギーのグラフの「上で」運動する。等号が成立するのは速度が0に等しいときであり、それはとりも直さずエネルギーがポテンシャルエネルギーのみのときである。

エネルギー保存則を用いて運動方程式を解くことを考えよう。一次元の力学的エネルギー保存則の式 (23.9) を速度について解けば、

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}, \quad (23.14)$$

運動方程式は2階の微分を含んだ方程式であったのに対して、この式は1階の微分までしか含んでいない。ポテンシャルが x のみの関数ならば変数分離をして両辺を時間で積分する、

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = \pm \int_{t_0}^t dt = \pm(t - t_0).$$

あとは積分計算を実行できれば質点の軌道 $x = x(t)$ を求めることができる。

自由な質点 ($V = 0$) の場合は

$$\int_{x_0}^x dx \sqrt{\frac{m}{2E}} = \sqrt{\frac{m}{2E}}(x - x_0) = \pm(t - t_0).$$

x について解けば $x = x_0 + v_0(t - t_0)$ となる。⁹⁾

一様重力場では、

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - mgz)}} = \pm(t - t_0).$$

これは直ちに積分が実行できて、

$$\pm(t - t_0) = -2\sqrt{\frac{g}{2}\left(\frac{E}{mg} - z\right)} + 2\sqrt{\frac{g}{2}\left(\frac{E}{mg} - z_0\right)}.$$

z について解くと

$$z(t) = z_0 \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - mgz_0)} \cdot (t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2, \quad (23.15)$$

となる。自由落下の初期条件 $t_0 = 0$ で $z_0 = h$, $v_0 = 0$ とするとエネルギーは $E = mgh$ なので、

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h.$$

⁹⁾ $\sqrt{2E/m} = \sqrt{v^2} = \pm v$ となることに注意せよ。

斜方投射の初期条件 $t_0 = 0$ で $z_0 = 0$, $v_{z0} = v_0 \sin \theta$ とするとエネルギーは $E = mv_0^2 \sin^2 \theta / 2$ なので,

$$z(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{g}{2} t^2.$$

いずれも運動方程式を積分する場合と同じ結果が得られた。しかしエネルギー保存則を用いると、積分操作を一度しか行わないで質点の軌道が求まった、という点で問題は簡単になっている。

この節では一次元のエネルギー保存則のみを扱った。これを三次元へ拡張するためには積分を改良しなければならない。ポテンシャルの積分は変数変換 $x = x(t)$ により座標の積分としたが、これは一次元なので普通の積分と変わらない。しかし実際には物体の軌道に沿った積分であり、三次元では一般に曲線軌道に沿った積分となる。このような曲線に沿った積分、線積分を導入してから三次元でのエネルギー保存則に移ろう。

PROBLEM

PROBLEM1. 一様重力場のもとで鉛直におかれた半径 a の円形のレールを考える。その最下点に質量 m の球をおき、初速 v_0 を水平方向に与える。この球が円形レールの内側を、レールから離れることなく、回り続けるための条件を求めよ。

SOLUTION.

§ 24. 線積分

この節では 3 次元空間内の曲線上で定義された線積分を導入する。1 変数関数 $x = f(t)$ の積分は t 軸と函数を囲む範囲の面積を表していた。線積分では任意の曲線とその上の函数で囲まれた面の面積を表す。物理では任意の曲線は運動の軌道に対応し、軌道上で定義された量の積分を計算することはよくある (たとえば仕事)。

3 次元空間上で定義された函数 $f(\mathbf{r})$ を曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ に沿って積分することを考える。力学で使うことを意識して \mathbf{r} を質点の位置、 t を時間と思うとわかりやすいだろう。曲線の特定の区間に γ という名前をつけて、 γ 上での積分を

$$\int_{\gamma} dl f(\mathbf{r}), \quad (24.1)$$

とかく。ここで dl は曲線上の微小線要素といい、

$$dl = |d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

とかける。あるいは区間 γ の始点と終点を P, Q として

$$\int_P^Q dl f(\mathbf{r}), \quad (24.2)$$

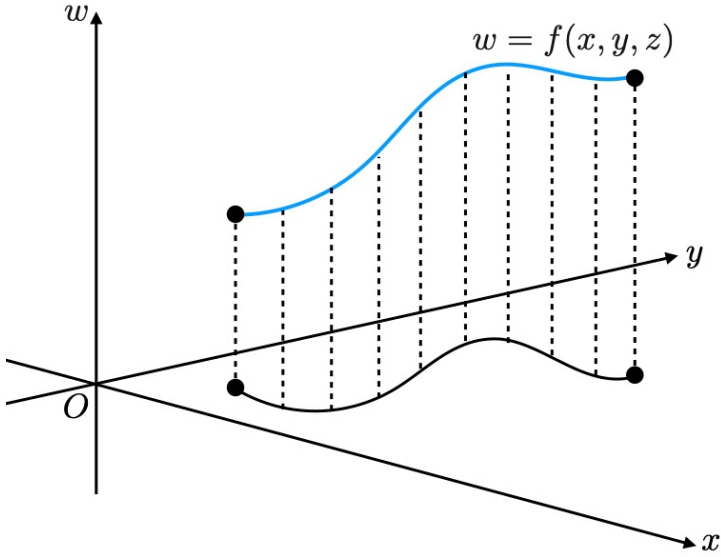


図 45 関数 f と曲線で囲まれた領域の面積.

と書いても良い. 始点と終点が一致する曲線をループといい, ループ γ 上の積分は特に

$$\oint_{\gamma} dl f(\mathbf{r}), \tag{24.3}$$

と表記する.

曲線の式 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ を線要素 dl からパラメータ t への変数変換とみなそう. 始点と終点において $t = t_P, t = t_Q$ とすると,

$$\frac{\mathbf{r} \mid P}{t \mid t_P} \rightarrow \frac{Q}{t_Q},$$

であるから (24.1) は

$$\int_{\gamma} dl f(\mathbf{r}) = \int_{t_P}^{t_Q} dt \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| f(\mathbf{r}(t)), \tag{24.4}$$

となる. 右辺に現れた因子は速度の大きさ (速さ) である. この右辺は普通の 1 変数関数に関する定積分なので (24.4) を線積分の定義とすることが多い.

(24.4) を区分求積法により正当化しよう. 連続な関数 f と曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ に沿った区間 $[t_P, t_Q]$ で挟まれる領域を N 個の縦長長方形に分割する. その関数と曲線で挟まれる領域の面積 S は 2 つの長方形の和,

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_i \cdot \min [f(\mathbf{r}(t_i)), f(\mathbf{r}(t_{i+1}))] \leq S \leq \sum_{i=0}^{N-1} h_i \cdot \max [f(\mathbf{r}(t_i)), f(\mathbf{r}(t_{i+1}))],$$

によって押さえられる. $\mathbf{r}(t_i)$ は各長方形の端点の座標であり, 特に $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_P), \mathbf{r}(t_N) = \mathbf{r}(t_Q)$ である. そして h_n は長方形の幅で $|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)|/N$ と与えられる. この分割では長

方形の底辺が直線なので曲線に近いが少しずつずれた折れ線になっている。分割の数を無限に多くして $N \rightarrow \infty$ としたとき、分割の幅 h_i は 0 に近づき曲線に近づいていく。すなわち h_i は $N \rightarrow \infty$ で微小線要素 dl である。

$N \rightarrow \infty$ で近似の精度が無限に良くなって 2 つの長方形の和が一致することがある。このとき積分確定といい函数 f の積分値が定義され

$$\int_P^Q dl f(\mathbf{r}) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} h_i \cdot f(\mathbf{r}(t_i)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)|}{N} \cdot f(\mathbf{r}(t_i)), \quad (24.5)$$

を得る。長方形の幅について

$$h_i = \frac{|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)|}{N} = \frac{|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)|}{t_{i+1} - t_i} \cdot \frac{t_{i+1} - t_i}{N},$$

と変形する。 $N \rightarrow \infty$ の極限において $t_{i+1} \rightarrow t_i$ なので曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ がなめらかならば、

$$\int_P^Q dl f(\mathbf{r}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{t_{i+1} - t_i}{N} \cdot \frac{|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)|}{t_{i+1} - t_i} \cdot f(\mathbf{r}(t_i)),$$

の極限が存在し t 積分の形 (24.4) に帰着させられる。こうして定義される曲線区間 γ 上の函数 f の積分を線積分 (line integral) という。

線積分は次の性質を持つ：

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dl (f_1 + f_2) &= \int_{\gamma} dl f_1 + \int_{\gamma} dl f_2, \\ \int_{\gamma} dl \alpha f &= \alpha \cdot \int_{\gamma} dl f, \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \\ \int_{\bar{\gamma}} dl f &= - \int_{\gamma} dl f. \end{aligned} \quad (24.6)$$

ただし $\bar{\gamma}$ は γ と逆向きの曲線を表す。¹⁰⁾

$f = 1$ の場合

$$l = \int_{\gamma} dl = \int_{t_P}^{t_Q} dt |\mathbf{v}|, \quad (24.7)$$

は曲線 γ の長さに等しい。また微分積分学の基本定理から $dl/dt = |\mathbf{v}|$ である。

次に 3 次元空間上のベクトル値函数 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ を考える。 \mathbf{F} は力学での力などを念頭におくと良い。軌道の接線方向の単位ベクトルを \mathbf{n} として \mathbf{F} との内積をとりスカラー量を作る。これを始点 P から終点 Q へ曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ に沿って積分することを、

$$\int_P^Q dl \cdot \mathbf{F} := \int_P^Q dl \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}, \quad (24.8)$$

¹⁰⁾ γ が P から Q へ向かう曲線ならば $\bar{\gamma}$ は Q から P へ向かう曲線。

とかく. ここで $d\mathbf{l} = dl\mathbf{n}$ は軌道の微小変位ベクトル (そのため文献によっては $d\mathbf{r}$ と表記されることもある). すなわち Riemann 和では

$$\int_P^Q d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} h_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)}{N} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)), \quad (24.9)$$

で定義できる. 長方形の幅について

$$h_i \mathbf{n} = \frac{|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)|}{N} \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \cdot \frac{t_{i+1} - t_i}{N},$$

と変形する. $N \rightarrow \infty$ の極限において $t_{i+1} \rightarrow t_i$ なので曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ がなめらかならば,

$$\int_P^Q d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{t_{i+1} - t_i}{N} \cdot \frac{\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \cdot f(\mathbf{r}(t_i)),$$

の極限が存在し t 積分の形

$$\int_P^Q d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{t_P}^{t_Q} dt \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \quad (24.10)$$

に帰着させられる. ここで \mathbf{v} は速度ベクトルであり,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} \mathbf{n},$$

の関係がある.

線積分は軌道に沿った積分なのでパラメータ t のとり方には依存しない. 実際 $s = s(t)$ の変数変換を行ったとしても変数変換の因子 dt/ds と微分の鎖法則からくる因子 $d\mathbf{l}/dt = (ds/dt) \cdot (d\mathbf{l}/ds)$ がキャンセルする. したがって軌道のパラメータ t は実際の時間である必要もなく, 計算に便利なものを選んで使えば良い.

PROBLEMS

PROBLEM1. xy 平面内の軌道 γ は原点 $(0, 0, 0)$ を出発して $(1, 0, 0)$ まで x 軸方向に直進し, 次に $(1, 1, 0)$ まで y 軸方向に直進し, 最後に $(2, 2, 0)$ まで直進するものとする. このとき次の函数を軌道 γ 上で積分せよ:

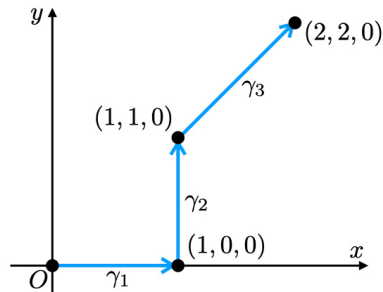
$$f = ax^2 + bxy + cy^2.$$

SOLUTION. 線積分の線型性を利用して γ を 3 つの区間に分ける. 軌道は xy 平面に限られるので積分の間は常に $z = 0$ である. 1 つ目の区間 γ_1 では x 軸方向に直進であり, パラメータとして $x = t$, $(0 \leq t \leq 1)$ と選べばその式は $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 0)$ と表される. このとき $d\mathbf{r}(t)/dt = (1, 0, 0)$ なのでその大きさは 1 に等しい. よって線積分を t 積分に置き換えると

$$\int_{\gamma_1} d\mathbf{l} f = \int_0^1 dt at^2 = \frac{a}{3},$$

と求まる. 2 つ目の区間 γ_2 をパラメータとして $y = t$, $(0 \leq t \leq 1)$ と選んで式で表すと $\mathbf{r}(t) = (1, t, 0)$. よって線積分は

$$\int_{\gamma_2} d\mathbf{l} f = \int_0^1 dt (a + bt + ct^2) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3},$$

図 46 軌道 γ .

と求まる. 最後に 3 つ目の区間 γ_3 をパラメータとして $x = y = t$, ($1 \leq t \leq 2$) と選んで式で表すと $\mathbf{r}(t) = (t, t, 0)$. このとき $d\mathbf{r}(t)/dt = (1, 1, 0)$ なのでその大きさは $\sqrt{2}$ に等しい. よって線積分を t 積分に置き換えると

$$\int_{\gamma_3} dl f = \int_1^2 dt \sqrt{2}(a+b+c)t^2 = \frac{7\sqrt{2}}{3}(a+b+c),$$

と求まる. 以上の結果を合わせて,

$$\int_{\gamma} dl f = \frac{4+7\sqrt{2}}{3}a + \frac{3+14\sqrt{2}}{6}b + \frac{1+7\sqrt{2}}{3}c.$$

PROBLEM2. 次のベクトル場を xy 平面内の単位円周 C 上で線積分せよ:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION. 円周上の点を $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ とパラメータ表示すると

$$\oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d\mathbf{l}}{d\theta} \cdot \mathbf{F}.$$

ここで

$$\frac{d\mathbf{l}}{d\theta} \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

したがって

$$\oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

§ 25. エネルギーの原理と保存力

この節では 3 次元空間でのエネルギーについて議論する. エネルギーは力の種類によっては保存したり, しなかったりする. 保存しない場合でも仕事という物理量によって意味を持たせられる.

まずは運動方程式を積分することからはじめよう。3次元での物体の運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (25.1)$$

両辺速度ベクトル \mathbf{v} との内積をとって時刻 t_0 から任意の時刻 t まで積分すれば

$$\int_{t_0}^t dt m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \int_{t_0}^t dt \mathbf{v} \cdot \mathbf{F},$$

となる。左辺において積の微分法により

$$v_x \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v_x^2,$$

と変形できることに気づけば

$$(\text{l.h.s.}) = \frac{m}{2} \int_{t_0}^t dt \frac{d}{dt} \mathbf{v}^2 = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2(t) - \frac{m}{2} \mathbf{v}_0^2,$$

と積分できる。ここで $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ は初速度。

一方で右辺は線積分を用いて

$$(\text{r.h.s.}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}(t)} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F},$$

と書ける。ここで $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ は初期位置。

以上から

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 + W = \frac{1}{2} m \mathbf{v}(t)^2, \quad (25.2)$$

$$W = \int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t)} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F}, \quad (25.3)$$

を得る。この関係を**エネルギーの原理**といい、 W を力 \mathbf{F} による**仕事** (work) という。はじめ運動エネルギー $m\mathbf{v}_0^2/2$ をもっていた質点は仕事 W を受けて $m\mathbf{v}(t)^2/2$ に変化したこと表示。この意味においてエネルギーは保存している。

例として(動)摩擦力を考えてみよう。摩擦力は進行方向と反対向きに一定の大きさで \mathbf{f} がはたらくとすると $d\mathbf{l} \cdot \mathbf{f} = -f dl$ となり、エネルギーの原理の式は

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}(t_0)^2 - f \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}(t)} dl = \frac{1}{2} m \mathbf{v}(t)^2,$$

となる。摩擦力による仕事は軌道の長さに依存していることがわかる。たとえば時刻 t_0 での位置から時刻 t での位置までまっすぐ到達した場合と、大きく迂回して到達した場合とでは積分区間の長さが違うので積分値も迂回した方が大きい値をもつことになる。

では仕事の値が軌道に全く依存せず始点と終点だけで決まるような力 \mathbf{F} の場合はどうなるのであろうか。 \mathbf{F} をそのような力としよう。すると始点と終点が一致した二つの軌道 γ_1 と γ_2 を考えると、力が軌道によらないことから、

$$\int_{\gamma_1} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} = \int_{\gamma_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}, \quad (25.4)$$

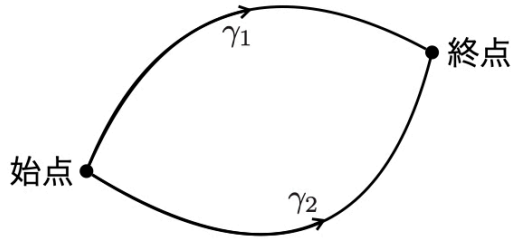


図47 積分経路のとり方

が成立する． γ_2 の逆向きの軌道を $\bar{\gamma}_2$ とすると線積分の性質から、

$$\int_{\bar{\gamma}_2} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} = - \int_{\gamma_2} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F},$$

γ_1 のあと $\bar{\gamma}_2$ をたどるループを γ とすると、

$$\oint_{\gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} = \int_{\gamma_1} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} + \int_{\bar{\gamma}_2} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (25.5)$$

つまり任意のループ軌道に沿った仕事が 0 に等しい。

仕事の値が間の軌道によらず始点 \mathbf{r}_0 と終点 $\mathbf{r}(t)$ のみに依存する場合を引き続き考える．始点と終点以外の点 \mathbf{R} をとって函数

$$\phi(\mathbf{r}) := \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F},$$

を定義する． \mathbf{R} は \mathbf{F} が定義される領域内の任意の点である．このとき終点に対し

$$\phi(\mathbf{r}(t)) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}(t)} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} + \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{r}_0} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} = W + \phi(\mathbf{r}_0),$$

したがって

$$W = \phi(\mathbf{r}(t)) - \phi(\mathbf{r}_0),$$

と計算され、たしかに仕事は始点と終点での函数 ϕ の値にのみ依存している．これは一次元のエネルギー保存則で力を $F = -dV/dx$ とおいたことと対応する．すなわち

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (25.6)$$

とにおいて（マイナスに注意せよ）、軌道をパラメータ表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t')$ として変数変換すれば

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}(t)} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} = - \int_{t_0}^t dt' \mathbf{v}(t') \cdot \nabla V(\mathbf{r}(t')),$$

被積分函数は函数 V の \mathbf{v} に沿った方向微分なので

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}(t)} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} = - \int_{t_0}^t dt' \frac{d}{dt'} V(\mathbf{r}(t')) = -V(\mathbf{r}(t)) + V(\mathbf{r}_0),$$

と計算できる。証明は省略するが「 $\mathbf{F} = -\nabla V$ とかける」ことと「 \mathbf{F} による仕事が間の軌道によらない」ことは同値である。この V をポテンシャル (potential) という。

以上により、力 \mathbf{F} に対しポテンシャル V が存在するならばエネルギーの原理の式は

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + V(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + V(\mathbf{r}(t)), \quad (25.7)$$

となる。これが三次元での力学的エネルギー保存則である。またポテンシャルの存在する力のことを保存力という。

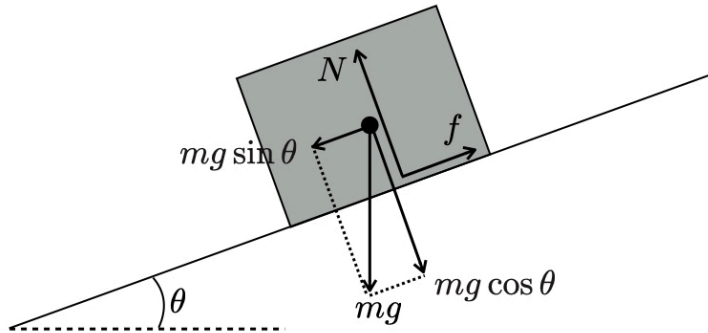


図 48 エネルギーと仕事の例

では例でエネルギーと仕事の理解を深めよう。傾斜 θ の斜面上を滑る質量 m の物体を考える。物体には重力 mg と斜面からの垂直抗力 N 、動摩擦力 f を受けている。エネルギーの原理の式から、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + W = \frac{1}{2}mv(t)^2,$$

ここで仕事は

$$W = \int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t)} d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{mg} + \mathbf{N} + \mathbf{f}),$$

である。いま x 軸を斜面に沿って上る方向にとり、 y 軸を斜面に垂直にとる。物体は斜面を滑降しているから $d\mathbf{l}$ は x 軸の負の向きである $-d\mathbf{l}e_x$ 。重力は $mg = mg \sin \theta e_x - mg \cos \theta e_y$ と展開できる。一方で垂直抗力は y 軸の正の向きで $\mathbf{N} = Ne_y$ 、摩擦力は x 軸の負の向き $\mathbf{f} = -fe_x$ である。 x 軸と y 軸は直交するから $e_x \cdot e_y = 0$ だから仕事は

$$W = (mg \sin \theta - f) \int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t)} d\mathbf{l},$$

となる。一般に進行方向 (\mathbf{v} の方向) と直交する向きの力による仕事は常に 0 である。等速円運動の場合は等速なので運動エネルギーは一定となる。向心力は常に速度と直交しているのので向心力による仕事は 0 でありたしかに運動エネルギーは不変である。

エネルギー保存則はあらゆる物理現象で成り立つ普遍的な法則である。実際エネルギー保存則における力 \mathbf{F} はポテンシャルが存在するという制限以外には何らの制約もない。しかし

摩擦力や空気抵抗のように仕事が物体の軌道に依存しポテンシャルをもたない「非保存力」は身近にあふれている。摩擦の場合、失われた物体のエネルギーは接触面との間に生じる熱エネルギーに転換されているからである。空気抵抗の場合は物体の運動エネルギーが空気分子の運動エネルギーに転換されている。これも熱エネルギーの一種である。このように熱エネルギーとして運動エネルギーが失われることを**散逸** (dissipation) という。接触面で起こる詳細は力学からは説明できず、さらに摩擦の起源については現在も理解が完全ではなく未解明である。散逸については非平衡統計力学の章で議論する。

もし散逸する熱エネルギーも加味すればエネルギーは再び保存する。厳密にエネルギーが保存しない例というのは観測史上1つも見つかっていない。エネルギー保存則というのは物理学においてかなり強力な制限を与えている。エネルギー保存則が普遍的に成り立つことを言い換えた主張として、

$$\text{第一種永久機関は存在しない} \quad (25.8)$$

がある。機関とは何らかのエネルギー（重力、熱、化学など）から力学的エネルギーを取り出す装置である。第1種永久機関とはその際に永久的に仕事を取り出し続けられるような機関のことである。たとえば自動車はガソリンとバッテリーの化学エネルギーを運動エネルギーに変えて走る。しかしガソリンまたはバッテリーが尽きれば自動車はそれ以上加速することはできず、摩擦によりやがて停止する。現実の世界ではさらに厳しい制約がエネルギーに課せられるが、それについては熱力学の章で論じることにする。

PROBLEM

PROBLEM1. **制動距離**：時速 60km で走行する重さ 1t の自動車がブレーキをかけてから静止するまでに動く距離はおよそ 27m である。ブレーキの大きさを求めよ。また速度が時速 50km のときの静止までに動く距離を計算せよ。ただし自動車は直進しているものとし、ブレーキは一定とする。

SOLUTION. まず単位を揃える；60 km/h = 50/3 m/s, 1t = 10³ kg. エネルギーの原理より

$$\frac{m}{2}v^2(t) - \frac{m}{2}v^2(t_0) = - \int_{x_0}^{x(t)} dx f.$$

ここで問題の仮定より $v(t) = 0$, $v(t_0) = 50/3$, $m = 10^3$, $x(t) - x_0 = 27$ である。 f が一定であることから右辺は $-f(x(t) - x(t_0)) = -27f$ に等しい。したがってあとは簡単な数値計算により、

$$f \simeq 5.1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2,$$

と求まる。同様に 50 km/h = 125/9 m/s であり、制動距離を d としてエネルギーの原理より

$$-\frac{m}{2}v^2(t_0) = -df,$$

が成立する。簡単な数値計算により $d \simeq 19$ となる。つまり静止するまでにおよそ 19m 動く。

PROBLEM1.N 個の質点の系におけるエネルギーの原理を導け。

SOLUTION. a 番目の質点の運動方程式は

$$m_a \frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{F}_a,$$

とかける。両辺 \mathbf{v}_a との内積をとって N 個の方程式の総和をとれば、

$$\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a \cdot \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \sum_{a=1}^N \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{F}_a,$$

両辺を初期時刻 t_0 から任意の時刻 t までで積分すると、各項で 1 質点の場合と同じ計算を行って、

$$\sum_a \frac{m_a}{2} (\mathbf{v}_a(t)^2 - \mathbf{v}_{a0}^2) = \sum_{a=1}^N \int_{t_0}^t dt' \mathbf{v}_a(t') \cdot \mathbf{F}_a(t').$$

右辺を W とおいて、

$$\sum_a \frac{m_a}{2} \mathbf{v}_{a0}^2 + W = \sum_a \frac{m_a}{2} \mathbf{v}_a(t)^2.$$

§ 26. 運動量保存則

2 つ目の重要な保存量である運動量について議論しよう。 N 個の質点の Newton 方程式を考えその総和をとる：

$$\sum_{a=1}^N m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \sum_{a=1}^N \mathbf{F}_a.$$

両辺を初期時刻 t_0 から任意の時刻 t までで積分すると、

$$\sum_{a=1}^N m_a \int_{t_0}^t dt \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \int_{t_0}^t dt \sum_{a=1}^N \mathbf{F}_a.$$

左辺は容易に積分が実行できて、

$$\sum_{a=1}^N m_a (\mathbf{v}_a(t) - \mathbf{v}_{a0}) = \sum_{a=1}^N \int_{t_0}^t dt \mathbf{F}_a,$$

ただし \mathbf{v}_{a0} は初期時刻での a 番目の質点の速度。つまり、

$$\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_{a0} + \mathcal{I} = \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a(t), \tag{26.1}$$

が成り立つ。ここで

$$\mathcal{I} := \sum_{a=1}^N \int_{t_0}^t dt \mathbf{F}_a. \tag{26.2}$$

\mathcal{I} のことを系に作用する力積 (impulse) という。

もし力が相互作用だけで外部からの力などを含まない場合、作用反作用の法則から力の和は打ち消し合い力積が 0 となり、

$$\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_{a0} = \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a(t) =: \mathbf{P}, \tag{26.3}$$

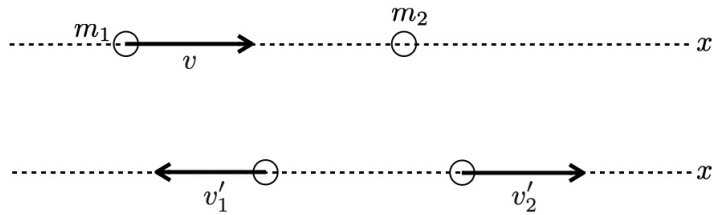


図49 運動量保存則の例

となってベクトル \mathbf{P} は保存する。これを**運動量保存則**といい、速度に質量を乗じたベクトル \mathbf{P} のことを系の**運動量** (momentum) という。運動量と力積はエネルギーの原理における運動エネルギーと仕事に対応している。

簡単な例として1次元における2つの質点の運動量保存則を考えよう。2つの質点ははじめは十分離れていて相互作用せず、質点1ははじめ速度 v_0 で静止している質点2に向かっていくとする。やがてお互いの距離が十分近づくと相互作用が発生して2質点の速度に変化が生じる。この様子は衝突のメカニズムを具体的に追求して運動方程式を立てて求められる。今は衝突をおおまかに見て、その詳細は無視するが衝突後の再び質点どうしの相互作用がなくなった状況を考える。衝突後の質点1と2の速度を v'_1, v'_2 とする。衝突の際に作用する力は相互作用のみだから運動量保存則が成り立つ：

$$m_1 v_0 + m_2 \cdot 0 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2.$$

ここで衝突に関して次の事実を経験則として紹介する。物体が衝突するときその跳ね返り具合は物体の材質によっている。ビー玉どうしはよく跳ね返るが、ビー玉をスポンジに衝突させたときはそれほど跳ね返らない。また例えば衝突したとたんにくっついて一体となって運動を続ける場合もある。この事実をふまえて2物体の跳ね返り具合を表すものとして次の量を定義する：

$$e := \frac{|v'_1 - v'_2|}{|v_1 - v_2|}. \quad (26.4)$$

これを物体1と2の間の**反発係数** (coefficient of restitution) という。 $e = 1$ の場合は**完全弾性衝突**といい、エネルギーの損失なく跳ね返る。一方 $e = 0$ の場合は定義から衝突後の2物体の速度は一致している。これは一体となって運動する場合を表している。このような衝突を**完全非弾性衝突**という。

静止した質点2に質点1を衝突させる場合は、

$$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_0}.$$

運動量保存則と併せて v'_1, v'_2 に関する連立方程式を解けば、

$$v'_1 = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_0, \quad v'_2 = \frac{(1+e)m_1}{m_1 + m_2} v_0. \quad (26.5)$$

質点 2 は当然正の向きに動き出すが、質点 1 は m_1 と em_2 の大小によって進む向きが変わる。特に完全弾性衝突 $e = 1$ で二つの質点の質量が等しい $m_1 = m_2$ のときは、 $v'_1 = 0, v'_2 = v_0$ となって質点 1 の速度がそっくりそのまま質点 2 に移る。この現象はカーリングやビリヤードなどで正面衝突した際に見られる。

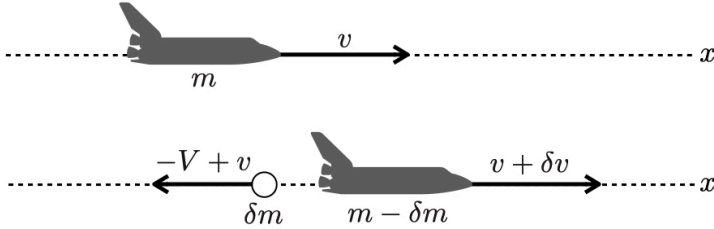


図 50 ロケットの推進力

次に速度 v で運動する質量 m の物体が何らかの機構によって 2 つの物体に分離する場合を考える。このときも外力がなければ運動量が保存しなければならない。たとえば速度 v で運動するロケットが後方に（ロケットから見て）速度 V で質量 δm の燃料を放出する場合、

$$mv = (m - \delta m)(v + \delta v) + \delta m(-V + v),$$

が成り立つ。ここで $v + \delta v$ は放出後のロケットの速度、 $-V + v$ は基準系から見た燃料の速度。整理するとロケットの速度の増分 δv は

$$\delta v = \frac{\delta m}{m - \delta m} V,$$

と求まる。燃料は推進力として放出され続けるからロケットの質量 m は連続な時間の関数である。各時刻で質量 $m(t)$ のロケットと燃料に関して運動量保存則が成り立ち続けるので時刻 t と微小な時間 dt 経過後とで

$$m(t)v(t) = m(t + dt)v(t + dt) + [m(t) - m(t + dt)](-V + v(t)),$$

が成立する。¹¹⁾ ここで右辺で dt の 2 次以上の項を無視すれば

$$(\text{r.h.s.}) = m(t)v(t) + m(t)\frac{dv}{dt}dt + \frac{dm}{dt}Vdt,$$

と書ける。よって

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} V.$$

m は減少関数なので右辺は正でありロケットの速度は増大することが見て取れる。両辺を初期時刻 $t = 0$ から燃料が尽きる時刻 t_f まで積分すると、容易な計算から

$$\delta v = v(t_f) - v(0) = V \ln \frac{m_0}{m_f}, \tag{26.6}$$

¹¹⁾ 右辺第 2 項で $(v(t + dt))$ ではなく $v(t)$ となるのは、速度 V の定義が $v(t)$ で運動するロケットを基準系に選んでいるからである。ただし $v(t + dt)$ に変えても結果は同じである。

が導かれる。ただし $m_0 = m(0)$, $m_f = m(t_f)$. m_0 は燃料とロケット本体を合わせた質量, m_f は本体だけの質量である。ロケットのジェット推進の式 (26.6) は **Tsiolkovsky の式** として知られる。

PROBLEM

PROBLEM1. 2 質点の衝突の前後でエネルギーが保存するときは反発係数が $e = 1$ であることを示せ。

SOLUTION. 式 (26.5) より

$$v_1 = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_0 \quad v_2 = \frac{(1+e)m_1}{m_1 + m_2} v_0.$$

またエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2,$$

が成り立っている。右辺に (26.5) を代入して少し整理すれば

$$m_1(m_1 + m_2)^2 = m_1(m_1 - em_2)^2 + (1+e)^2 m_1^2 m_2,$$

を得る。これを e について解けば $e = 1$ が得られる。

PROBLEM2. 一様重力場に逆らって加速するロケットのジェット推進の式を導け。

SOLUTION. 時刻 t から $t + dt$ の間の重力による力積は

$$\mathcal{I} = - \int_t^{t+dt} dt' mg = -mgdt,$$

これを加えて

$$m(t)v(t) - mgdt = m(t+dt)v(t+dt) + [m(t) - m(t+dt)](-V + v(t)),$$

が成立する。 dt の 1 次までで整理すれば,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} V - g.$$

両辺を時刻 t から $t + dt$ で積分すれば

$$\delta v = v(t_f) - v(0) = V \ln \frac{m_0}{m_f} - g(t_f - t_0),$$

となる。重力の影響により速度の増分は重力がないときよりも小さくなる。

§ 27. 単振り子

長さ l のひもに重さ m のおもりがつるされた振り子の運動を調べよう。振り子を静かに放すと平面内を往復運動する。おもりの座標は原点を振り子の付け根にとる。時刻 t での振り子の振れ角を $\theta(t)$ とすると円運動のときと同じようにパラメータ表示できて,

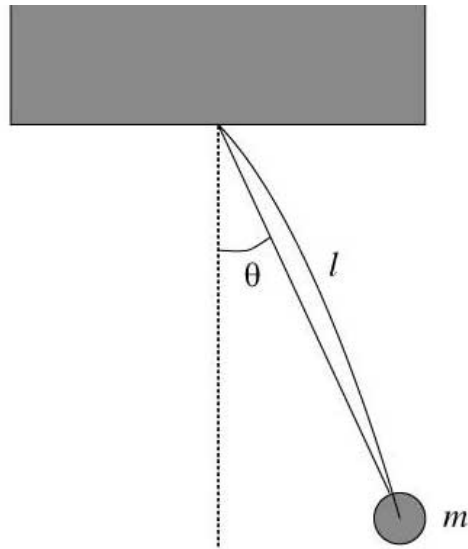


図 51 単振り子

$x = l \sin \theta(t)$, $y = -l \cos \theta(t)$. 張力は速度と直交しているので仕事はしない. したがってエネルギー保存則が重力に関して成り立ち,

$$E = \frac{1}{2}mv(t)^2 - mgl \cos \theta(t), \quad (27.1)$$

が保存する. 振り子を離れた瞬間の振れ角を θ_0 とすれば, はじめ速度は 0 なので初期時刻のエネルギーは $-mgl \cos \theta_0$ であり, 任意の時刻でも

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 + mgl \cos \theta(t) = -mgl \cos \theta_0, \quad (27.2)$$

となる. $v(t)^2 = v_x(t)^2 + v_y(t)^2$ で, 合成関数の微分より,

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx}{dt} = l\dot{\theta}(t) \cos \theta(t), \\ v_y(t) &= \frac{dy}{dt} = l\dot{\theta}(t) \sin \theta(t). \end{aligned}$$

よって, $v(t) = l\dot{\theta}(t)$. これをエネルギー保存則の式に代入すると θ と t だけの方程式,

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(t) - mgl \cos \theta(t) = -mgl \cos \theta_0,$$

が得られる. これを整理して $\dot{\theta}$ について解くと,

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) = \pm \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta(t) - \cos \theta_0)}.$$

この微分方程式を解くためにはまず変数分離して両辺を時間について積分する。ただし積分区間は時刻 $t = 0$ から一周期後 $t = T$ までとする。すると最大の振れ角は θ_0 だから、

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} \int_0^T dt &= 4 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \\ &= 4 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}. \end{aligned}$$

左辺に係数 4 が現れるのは、 θ_0 から 0 まで動く運動の軌跡と 0 から反対側 $-\theta_0$ への運動の軌跡が対称であり積分の値は等しくなるためである。新たな変数として、

$$\sin \theta = \sin \theta_0 \sin \varphi,$$

なる φ を導入しよう。これで変数変換すれば、

$$d\theta = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi}} d\varphi, \quad \begin{array}{l|l} \theta & 0 \rightarrow \theta_0 \\ \varphi & 0 \rightarrow \pi/2 \end{array}$$

したがって、

$$\begin{aligned} T &= 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \varphi} \times \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi}} \\ &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right). \end{aligned}$$

ここで $K(x)$ は第一種完全楕円積分とよばれるものであり、

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (27.3)$$

で定義される。

では微小な振動 $\theta_0 \ll 1$ のときを考えてみよう。このとき $\sin \frac{\theta_0}{2} \ll 1$ である。第 1 種楕円関数をこの小さい $\sin \frac{\theta_0}{2}$ について Taylor 展開すれば、

$$K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) = K(0) + K'(0) \sin \frac{\theta_0}{2} + \frac{K''(0)}{2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \dots$$

2 次以上の項は非常に小さいとして無視することにする。

$$K(0) = \frac{\pi}{2}, \quad K'(0) = 0,$$

と計算できるから、振り子の運動の周期は1次までの近似で、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (27.4)$$

と求まる。微小な振動の場合、振り子の周期はおもりの質量・はじめの振れ角には関係なくおもりを吊るすひもの長さだけに依存している。同様に2次までの近似では $K''(0) = \pi/8$ から、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{8} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}\right), \quad (27.5)$$

となり最初の振れ角に依存した項が現れるがやはりおもりの質量にはよらない。第1種楕円関数の形から明らかなようにどこまでとってもふりこの周期はおもりの質量によらない。これを振り子の**等時性**という。

PROBLEM

PROBLEM1. 振り子の周期を運動方程式から導出せよ。

SOLUTION. 水平方向に x 軸、垂直方向に y 軸をとり、ひもと天井の接点に原点を取る。おもりに働く力は重力 $-mge_y$ とひもの張力 \mathbf{T} であるから、振れ角を θ とすると運動方程式は、

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T \sin \theta, \\ m\ddot{y} &= T \cos \theta - mg. \end{aligned}$$

ここで $T = |\mathbf{T}|$. パラメータ表示 $x = l \sin \theta$, $y = -l \cos \theta$ (l はひもの長さ) を行くと、加速度は

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta, \\ \ddot{y} &= l\ddot{\theta} \sin \theta - l\dot{\theta}^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

これを方程式に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta &= -(T/ml) \sin \theta, \\ \ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta &= (T/ml) \cos \theta - g/l, \end{aligned}$$

1つ目に $\cos \theta$, 2つ目に $\sin \theta$ をかけて辺々足し算すると T を消去できて、

$$\ddot{\theta} = -(g/l) \sin \theta.$$

両辺に $\dot{\theta}$ をかけて時刻0から t まで積分すると、

$$\frac{1}{2} [\dot{\theta}(t)^2 - \dot{\theta}(0)^2] = \frac{g}{l} [\cos \theta(t) - \cos \theta(0)].$$

さらに両辺に ml^2 をかければエネルギー保存則 (27.1) に一致する。あとの議論は同じなので省略する。

PROBLEM2. 水平に固定された円筒の上に質点を静かに置くと、重力により面に沿って運動を始める。円筒の中心から見た角度で質点の座標を定めると、ある角度 θ_c に達したところで質点は円筒から離れて、落下運動した。角度 θ_c を求めよ。

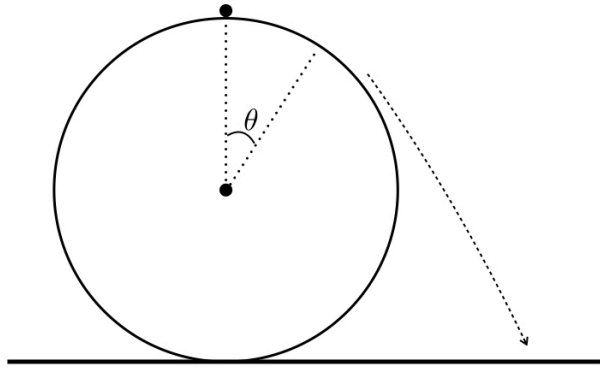


図 52

SOLUTION. 水平方向に x 軸, 垂直方向に y 軸をとり, 円筒の中心に原点を取る. 円筒の半径を l とおくと, 円筒の上を動いているときの質点の座標は $x = l \sin \theta$, $y = l \cos \theta$ とパラメータ表示できる. 質点に働く力は重力 $-mge_y$ と垂直抗力 \mathbf{N} の 2 つあり, 運動方程式は,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= N \sin \theta, \\ m\ddot{y} &= N \cos \theta - mg. \end{aligned}$$

ここで N は垂直抗力の大きさ. パラメータ表示を用いると加速度はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta, \\ \ddot{y} &= -l\ddot{\theta} \sin \theta - l\dot{\theta}^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

これを方程式に代入して整理すると,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta &= (N/ml) \sin \theta, \\ -\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta &= (N/ml) \cos \theta - g/l, \end{aligned}$$

となる. この 2 式から $\dot{\theta}$ を消去すると, 方程式 $\ddot{\theta} = (g/l) \sin \theta$ が得られる. これは単振り子の運動方程式と一致する. 他方で $\ddot{\theta}$ を消去すると,

$$\dot{\theta}^2 = -N/ml + (g/l) \cos \theta,$$

が得られる. 両辺をさらに t で微分すると (今は垂直抗力も時間の関数であることに注意せよ),

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\dot{N}/ml - (g/l)\dot{\theta} \sin \theta,$$

となる. 1 つ目の方程式を使って $\ddot{\theta}$ を消去して整理すれば,

$$\dot{N} = -3mg\dot{\theta} \sin \theta,$$

となる. 両辺を時刻 0 から t までで積分する. $N(0) = mg$, $\theta(0) = 0$ であるから,

$$N(t) - mg = 3mg \cos \theta(t) - 3mg,$$

$\theta = \theta_c$ のとき質点は円筒から離れるが, これは「垂直抗力の大きさ N が 0 になる」ことと同じ. それゆえ,

$$\cos \theta_c = 2/3,$$

あるいは $\theta_c = 0.84 \dots \text{rad}$ と求まる.

PROBLEM3. Newton のゆりかご: 半径 R , 質量 m のおもりを長さ l のひもで吊るした振り子 N 個を一直列に並べる. 静止しているときそれぞれの振り子はちょうど接するように置かれていてひもは鉛直である. 左端の振り子を振れ角 θ_0 で静かに放すときの N 個の振り子の運動を調べよ. また左から数個の振り子を同じ振れ角で同時に静かに放したときではどうなるか.

ただしおもりの半径に比べてひもが十分に長いとして, すべてのおもりの運動は質点とみなしてよい. さらにおもりどうしは完全弾性衝突すると仮定する.

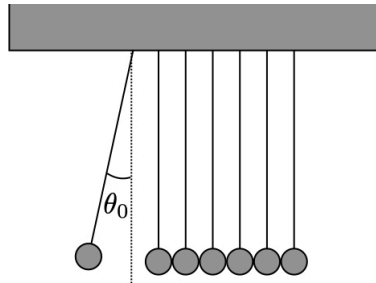


図 53 Newton のゆりかご

SOLUTION. まず左端の 1 つだけを振れ角 θ_0 で静かに放す場合を考えていこう. おもりには左から順に $1, 2, \dots, N$ とラベルを振っておく. このときとなり振り子に衝突するまでの間はおもりは重力と張力を受けている. 単振り子と同様なエネルギー保存則が成り立っている:

$$E = \frac{1}{2}mv_1(t)^2 - mgl \cos \theta_1(t) = -mgl \cos \theta_0.$$

衝突の直前では $\theta_1(t) = 0$ なので, 最下点でのおもり 1 の速度を v_m とすると

$$\frac{1}{2}mv_m^2 - mgl = -mgl \cos \theta_0,$$

となる. これから直ちに $v_m = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta_0)}$ と求まる.

次におもり 1 と 2 の衝突の瞬間を調べていこう. はじめそれぞれの速度は $v_m, 0$ であり, 衝突後 v'_1, v'_2 になっているとする. 同質量の完全弾性衝突では速度がそっくりそのまま移されるので $v'_1 = 0, v'_2 = v_m$ である. 次のおもり 2 と 3, 3 と 4 \dots と同様の速度の転移が起こっていく. 最後におもり N が速度 v_m を獲得して再び右側へ振り子運動する. 最大の振れ角はエネルギー保存則から明らかに $-\theta_0$ である.

こうして Newton のゆりかごでは両端のおもりだけが振り子運動し, 中間の $N - 2$ 個のおもりたちは実質的に静止する.

では次に左から $M (< N)$ 個を同時に振れさせる場合について考える. M 個のおもりは最下点までお互いに衝突することなく速度 v_m で右方向へ振れる. まず最初におもり M と $M + 1$ が衝突しておもり $M + 1$ に速度 v_m が転移する. この速度は次々に転移して行って最終的に おもり N まで伝わっていく.

他方 おもり M は静止するので今度は おもり $M - 1$ と衝突することになる. そして同様に速度の転移が起こり おもり $M - 1$ は静止し おもり M が再び速度 v_m を獲得し, 次々に転移して行って最終的に $N - 1$ まで伝わる. おもり N はすでに速度 v_m を獲得しているので $N - 1$ と衝突することはない. これを繰り返しておもり 1 までが静止する.

結局 おもり 1 から $N - M$ までは静止したままとなり, M 個のおもり $N - M + 1$ から N までは右側へ振り子運動する. それぞれ同じ初速 v_m なので最大振れ角 $-\theta_0$ となる. たとえば $N = 3$ のとき

$M = 2$ 個を同時に振れさせると真ん中のおもりは常に振り子運動を続ける。

§ 28. 二体系の運動方程式

2つの質点（質量 m_1, m_2 ）がある系（二体系）の運動方程式は、

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1, \quad (28.1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_2, \quad (28.2)$$

である。質点にはたらく力は相互作用と外力であり $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(\text{ex})} + \mathbf{F}_i^{(\text{int})}$, ($i = 1, 2$) とかける。この節では二体系の運動方程式の解法について議論する。また物理でよく使われる慣性基準系として重心系を紹介する。

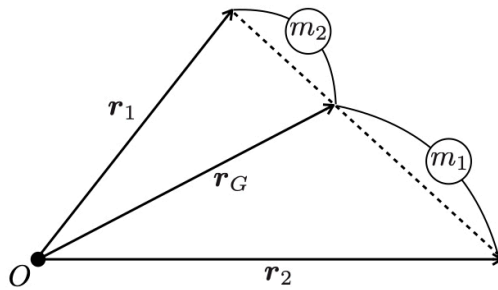


図 54 重心座標

式 (28.1) と (28.2) を足し合わせれば相互作用は $\mathbf{F}_1^{(\text{int})} = -\mathbf{F}_2^{(\text{int})}$ だから打ち消しあって、

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_1^{(\text{ex})} + \mathbf{F}_2^{(\text{ex})},$$

となる。左辺で質量の和をくくりだすと、

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \mathbf{F}_1^{(\text{ex})} + \mathbf{F}_2^{(\text{ex})}, \quad (28.3)$$

ここで、

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (28.4)$$

はこの二質点の重心座標である。質量の和を $M = m_1 + m_2$ とおけば、重心座標に関する新たな運動方程式、

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \mathbf{F}_G^{(\text{ex})}, \quad \mathbf{F}_G^{(\text{ex})} = \mathbf{F}_1^{(\text{ex})} + \mathbf{F}_2^{(\text{ex})}, \quad (28.5)$$

が得られる。これは力 $\mathbf{F}_G^{(\text{ex})}$ を受けている質量 M の質点の位置 \mathbf{r}_G と速度 \mathbf{v}_G を定める運動方程式と等価である。たとえ 2 質点が等速直線運動しなくても、外力の和が $\mathbf{0}$ ならば重心座

標は等速直線運動する．微分の線型性からこの重心座標の速度は，

$$\mathbf{v}_G = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad (28.6)$$

である．外力の和が $\mathbf{0}$ のとき運動量が保存するので， $\mathbf{F}_G^{(\text{ex})} = \mathbf{0}$ ならば重心座標の運動量

$$\mathbf{p}_G := M \mathbf{v}_G = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad (28.7)$$

が保存量である．さらに運動エネルギー，

$$T_G := \frac{M}{2} \mathbf{v}_G^2 = \frac{1}{2M} \mathbf{p}_G^2, \quad (28.8)$$

も保存量となる．外力の和が $\mathbf{0}$ でなくても $\mathbf{F}_G^{(\text{ex})}$ にポテンシャル V_G が存在するならば，

$$E_G := T_G + V_G, \quad (28.9)$$

が保存量である．

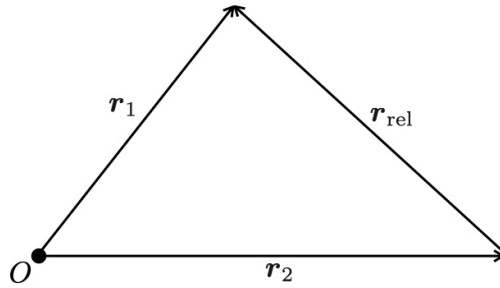


図 55 相対座標

一方で (28.1) に m_2 をかけたものから (28.2) に m_1 をかけたものを引くと，今度は相互作用項は残って，

$$m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = (m_2 + m_1) \mathbf{F}^{(\text{int})} + m_2 \mathbf{F}_1^{(\text{ex})} - m_1 \mathbf{F}_2^{(\text{ex})}, \quad (28.10)$$

となる．ただし $\mathbf{F}^{(\text{int})} = \mathbf{F}_1^{(\text{int})} = -\mathbf{F}_2^{(\text{int})}$ ．ここで相対座標 $\mathbf{r}_{\text{rel}} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ を導入し，換算質量 (reduced mass) という量を，

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (28.11)$$

によって定義すると，

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{\text{rel}} = \mathbf{F}_{\text{rel}}, \quad (28.12)$$

ここで，

$$\mathbf{F}_{\text{rel}} = \mathbf{F}^{(\text{int})} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{F}_1^{(\text{ex})} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{F}_2^{(\text{ex})}.$$

方程式 (28.12) は力 \mathbf{F}_{rel} を受けている質量 μ 、位置 \mathbf{r}_{rel} の質点についての運動方程式になっている。微分の線型性から速度ベクトルは

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \quad (28.13)$$

で定義される。運動量は

$$\mathbf{p}_{\text{rel}} = \mu \mathbf{v}_{\text{rel}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_2, \quad (28.14)$$

であり $\mathbf{F}_{\text{rel}} = \mathbf{0}$ のとき保存する。運動エネルギーは、

$$T_{\text{rel}} := \frac{\mu}{2} \mathbf{v}_{\text{rel}}^2 = \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}_{\text{rel}}^2, \quad (28.15)$$

となる。

こうして二体系の運動方程式に対して興味深い事実が導かれる。もとの運動方程式

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1^{(\text{ex})} + \mathbf{F}^{(\text{int})}, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_2^{(\text{ex})} - \mathbf{F}^{(\text{int})},$$

に対して、ここから得られた重心座標と相対座標の方程式の組は、

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \mathbf{F}_G^{(\text{ex})}, \quad \mu \frac{d^2 \mathbf{r}_{\text{rel}}}{dt^2} = \mathbf{F}^{(\text{int})}, \quad (28.16)$$

である。両組は自由度が 6 で同値である。相互作用は多くの場合に 2 質点の間の距離にしかよらないので $\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{F}_{\text{int}}(|\mathbf{r}_{\text{rel}}|)$ と書ける。外力が重心座標にしか依存しないならば、完全に重心座標に関するものと相対座標に関するものとに分離される。すなわち二体問題は重心座標と相対座標のそれぞれの一体問題に還元される。運動エネルギーについても、

$$T = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{p}_G^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}_{\text{rel}}^2}{2\mu} = T_G + T_{\text{rel}}, \quad (28.17)$$

のように分離され T_G と T_{rel} のそれぞれが保存することがわかる。

重心座標 \mathbf{r}_G を原点にとった座標系を**重心系** (system of centre of mass) という。重心系に慣性基準系をとって観測すると 2 質点の運動はどのように見えるだろうか。それぞれの質点の位置ベクトルは $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_G$, $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_G$ 。運動方程式は、

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}'_1}{dt^2} = m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} - m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2},$$

\mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_G に関する運動方程式の式を代入して整理すれば、

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}'_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{\text{rel}},$$

が導かれる。同様にして、

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}'_2}{dt^2} = -\mathbf{F}_{\text{rel}}.$$

したがって重心系では2つの質点が力 \mathbf{F}_{rel} で相互作用しているように見える。重心座標は原点なので $\mathbf{r}'_G = \mathbf{0}$ であり、 $\mathbf{v}'_G = \mathbf{0}$ 。よって運動量は

$$\mathbf{p}'_G = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{0}. \quad (28.18)$$

よって2質点の運動量は大きさが等しく互いに逆向きである。そこで $|\mathbf{p}'_1| = |\mathbf{p}'_2| = p'$ とおく。2質点の全運動エネルギーは重心の寄与が消えて、

$$T = \frac{p'^2}{2m_1} + \frac{p'^2}{2m_2} = \frac{p'^2}{2\mu}. \quad (28.19)$$

われわれの現実世界に即した系を**実験室系** (system of laboratory) ということがある。実験室系はいわば $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ をそのまま扱うような系である。しかし実験室をうまく設定することで問題を簡単にできる。実験室にて静止した標的を置きそれめがけて粒子を衝突させ、その散乱の様子を調べるときなどが該当する。その例を次の節で見る。

二体系の運動方程式は多くの場合に簡単に解ける一方で、三体以上の問題は突然困難が増す。三体問題ですら厳密解が解析的にもとまることは稀である。これらは**多体問題** (many body problem) と呼ばれ、ほとんどは数値計算によってしか軌道を求めることができない。

§ 29. 弾性衝突

二体系の例として弾性衝突 (elastic collision) を議論しよう。§26 では1次元的な衝突の問題を扱ったが、ここでは3次元空間における衝突を扱うことにする。また反発係数は $e = 1$ の完全弾性衝突を考え、衝突の詳細には触れない。

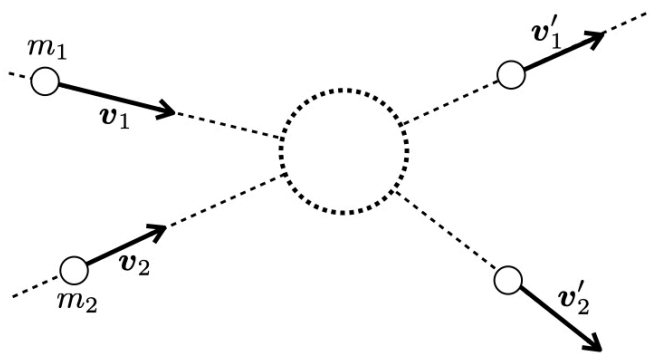


図 56 弾性衝突. 衝突の詳細はわからないとして点線の円で表している。

3次元で2つの質点が衝突すると別々な方向に跳ね返っていく。衝突前2質点は等速直線運動しているので、その2質点の軌道が同一直線上であるような慣性基準系をいつでも選ぶことができる。衝突前の軌道を $\mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_1 t + \mathbf{r}_{10}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{v}_2 t + \mathbf{r}_{20}$ とおく。Galilei 変換 $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V} t$ によって2質点の速度は $\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}$ へ変換される。2質点の軌道が

同一直線上のためには速度ベクトルが平行でなければならない： $v_1 - V = \alpha(v_2 - V)$ 。ただし $\alpha \neq 1$ とする（この場合衝突しない）。 V について解くと

$$V = \frac{1}{1-\alpha}v_1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}v_2.$$

このとき

$$v'_1 = -\frac{\alpha}{1-\alpha}(v_1 - v_2), \quad v'_2 = -\frac{1}{1-\alpha}(v_1 - v_2),$$

となつてたしかに平行である。さらに軌道の上に x 軸を定義しなおして2つの質点の衝突前の速度を $v_1 = (v_1, 0, 0)$, $v_2 = (v_2, 0, 0)$ とおくことができる（プライムは省略した）。

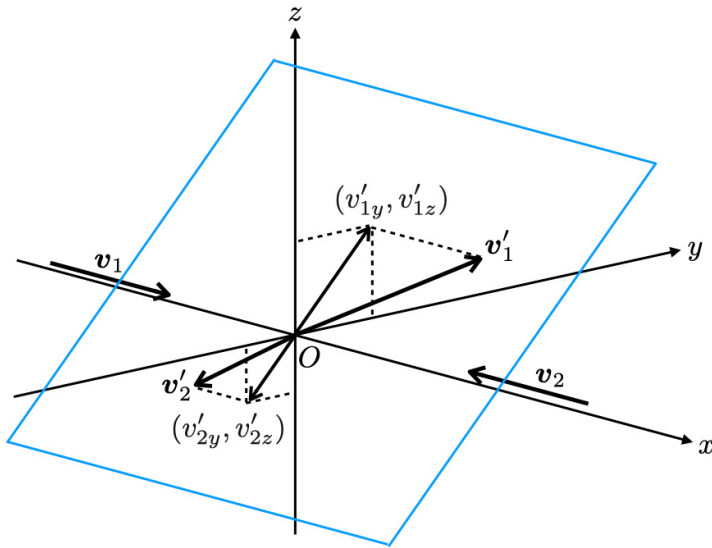


図 57 弾性衝突の前後の軌道は運動量保存則から青線の面上に限られる。

衝突後の2質点の速度をそれぞれ v'_1 , v'_2 としよう。運動量保存則より次の3式が成立する：

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_{1x} + m_2v'_{2x},$$

$$0 = m_1v'_{1y} + m_2v'_{2y},$$

$$0 = m_1v'_{1z} + m_2v'_{2z}.$$

衝突後の速度の x 成分はこの式からはまだ決まらない。一方で y, z 成分は2質点でちょうど反対向きである。すなわち yz 平面から見ると、2つのベクトル (v'_{1y}, v'_{1z}) と (v'_{2y}, v'_{2z}) は互いに逆向きで平行（反平行）なベクトルである。特にこの2つのベクトルは同一直線上にある。したがってこの直線と、衝突前の2質点の軌道（ x 軸）の共有面が存在し運動はその面上に限られることがわかる。そこでこの共有面に y 軸をとりなおして2次元運動として考察していく。

衝突前の速度は同様に $\mathbf{v}_1 = (v_1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (v_2, 0)$ とおく. 衝突後の速度を \mathbf{v}'_1 , \mathbf{v}'_2 とおくとやはり運動量保存則より

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}, \\ 0 &= m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}, \end{aligned}$$

が成立する. 衝突後の質点 1 の速さを v'_1 とおき, x 軸と \mathbf{v}'_1 のなす角を θ とおく. θ は**散乱角** (scattering angle) とよばれる. すると $v'_{1x} = v'_1 \cos \theta$, $v'_{1y} = v'_1 \sin \theta$ であり, 運動量保存則から

$$v'_{2y} = -\frac{m_1}{m_2} v'_1 \sin \theta, \quad v'_{2x} = \frac{m_1}{m_2} v_1 + v_2 - \frac{m_1}{m_2} v'_1 \cos \theta, \quad (29.1)$$

と解ける. したがって $|\mathbf{v}'_2|^2 = (m_1/m_2)^2 v_1^2 \sin^2 \theta + [(m_1/m_2)^2 v_1 + v_2 - (m_1/m_2)^2 v'_1 \cos \theta]^2$ であり, 整理すると,

$$|\mathbf{v}'_2|^2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 v_1^2 - 2\frac{m_1}{m_2}(m_1 v_1 + m_2 v_2) v'_1 \cos \theta + \frac{1}{m_2^2} (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2.$$

完全弾性衝突のときエネルギー保存則が成り立っていて,

$$\frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} |\mathbf{v}'_2|^2.$$

ここで m_1, m_2 は各質点の質量. $|\mathbf{v}'_2|^2$ の式を代入して整理すれば, v'_1 に関する二次方程式,

$$v_1'^2 - 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} v'_1 \cos \theta + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_1 v_2 = 0, \quad (29.2)$$

が得られる. 散乱角 θ がわかればこの式から衝突後の 2 質点の速度は完全に決まる.

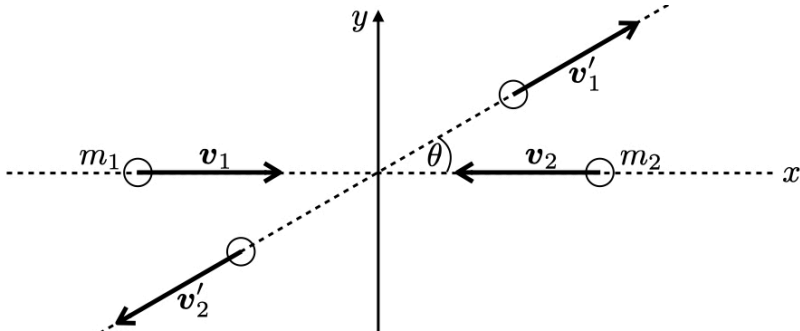


図 58 重心系から見た弾性衝突の散乱角

しかしながら (29.2) の v'_1 の解はいささか複雑である. そこで計算に都合の良い座標系を選んで (29.2) を簡単な式にしたい. まず気づくのは (29.2) の第 2 項に衝突前の重心速度が含まれているので, 衝突前における重心系をとるとこの項が落ちる. また後ろの 2 項についても整理すると,

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_1 v_2 = \frac{v_1}{m_1 + m_2} \left[2(m_1 v_1 + m_2 v_2) - (m_1 + m_2) v_1 \right],$$

となり重心速度を含む項が落ちると簡単になる。以上より重心系では $|v'_2|^2$ に関する方程式が

$$v_1'^2 - v_1^2 = 0,$$

となりしたがって解は

$$v_1' = \pm v_1. \quad (29.3)$$

重心系では散乱角 θ によらず衝突前と同じ大きさの速度で散乱される。また複合がついているが負の解というのは正のときと逆向きにはねかえる場合であり、 θ にたいして $\pi + \theta$ の散乱角をとることと同じである。よって正の方だけをとれば十分である。質点2の速さは、

$$v_2' = |v_2'| = \frac{m_1}{m_2} v_1 = -v_2, \quad (29.4)$$

である。

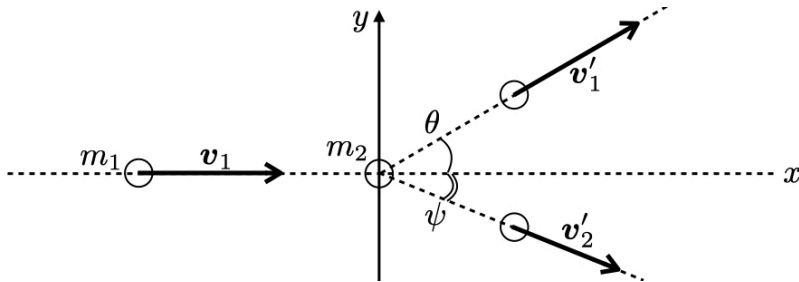


図 59 実験室系から見た弾性衝突の散乱角

次に衝突前の質点2が静止している実験室系をとってみよう： $v_2 = 0$ 。したがって(29.2)は、

$$v_1'^2 - 2 \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} v_1' \cos \theta + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 = 0. \quad (29.5)$$

この v_1' についての2次方程式を解けば、

$$v_1' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \left[\cos \theta \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2 \theta} \right], \quad (29.6)$$

となる。2質点の質量の大小によって散乱角 θ が存在できないことがある。標的が重い $m_1 < m_2$ ときには平方根の中は常に正なので、任意の角度で散乱することができる。ところが標的が軽い $m_1 > m_2$ 場合、衝突後の速度 v_1' が実数で存在するためには平方根の中は正でなければならないので、

$$\sin^2 \theta \leq \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 =: \sin^2 \theta_{\max}. \quad (29.7)$$

したがって $\sin \theta_{\max}$ より大きい散乱角 θ では散乱できない、ということが結論できる。質点2の速さは

$$v_2' = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{(v_1'^2 - 2v_1 v_1' \cos \theta + v_1^2)}, \quad (29.8)$$

によって与えられる。重心系と異なり質点 2 が静止している実験室系では質点 2 の散乱角 ψ は複雑になる。散乱角を ψ とおいて $v'_{2x} = v'_2 \sin \psi$, $v'_{2y} = v'_2 \cos \psi$ とおいて (29.1) より

$$\tan \psi = -\frac{v'_1 \sin \theta}{v_1 - v'_1 \cos \theta}, \quad (29.9)$$

が得られる。 $m_1 = m_2$ のときには、

$$v'_1 = v_1 \cos \theta, 0. \quad (29.10)$$

$v'_1 = 0$ のとき $v'_2 = (v_1, 0)$ なので質点 1 の速度が質点 2 にそっくりそのまま移る。質点 2 の散乱角は $\tan \psi = 0$ 。 $v'_1 = v_1 \cos \theta$ のときは質点 2 は速さ $v'_2 = v_1 \sin \theta$, 散乱角 $\tan \psi = -\cot \theta$ で散乱される。

最後に重心系と実験室系における質点 1 の散乱角 θ_{CM} と θ_{lab} の間の変換公式を導出しよう。実験室系での質点 1 のはじめの速度を $\mathbf{v}_1^{(\text{lab})} = (v_1^{(\text{lab})}, 0)$ とおくと重心速度は

$$\mathbf{v}_G = \frac{m_1 \mathbf{v}_1^{(\text{lab})}}{m_1 + m_2}. \quad (29.11)$$

重心系ではこれが $\mathbf{0}$ になるので重心系から見た質点 1, 2 の衝突前の速度は Galilei 変換により

$$\mathbf{v}_1^{(\text{CM})} = \mathbf{v}_1^{(\text{lab})} - \mathbf{v}_G, \quad \mathbf{v}_2^{(\text{CM})} = -\mathbf{v}_G, \quad (29.12)$$

となる。また衝突後の質点 1 の速度についても同じ変換則 $\mathbf{v}'_1^{(\text{CM})} = \mathbf{v}'_1^{(\text{lab})} - \mathbf{v}_G$ で移り合う。 x, y 成分それぞれでは散乱角の定義より

$$\begin{aligned} v'_1{}^{(\text{CM})} \cos \theta_{\text{CM}} &= v_1{}^{(\text{lab})} \cos \theta_{\text{lab}} - v_G, \\ v'_1{}^{(\text{CM})} \sin \theta_{\text{CM}} &= v_1{}^{(\text{lab})} \sin \theta_{\text{lab}}, \end{aligned}$$

が成り立っている。重心速度を左辺に移行してから辺々割り算をして θ_{lab} について解けば

$$\tan \theta_{\text{lab}} = \frac{\sin \theta_{\text{CM}}}{\cos \theta_{\text{CM}} + v_G/v_1{}^{(\text{lab})}}. \quad (29.13)$$

さらに $v_1{}^{(\text{lab})} = v_1^{(\text{CM})} = m_2 v_G/m_1$ なので

$$\tan \theta_{\text{lab}} = \frac{\sin \theta_{\text{CM}}}{\cos \theta_{\text{CM}} + m_1/m_2}, \quad (29.14)$$

を得る。特に 2 質点の質量が $m_1 = m_2$ で等しいときは半角の公式により $\tan \theta_{\text{lab}} = \tan(\theta_{\text{CM}}/2)$ が導かれる。すなわち重心系での散乱角は実験室系のちょうど二倍になる。

ここでの議論では衝突がどのように起こっているかの詳細には一切触れなかったことに注意しよう。衝突の前後の速度と散乱角だけで議論が閉じていて、衝突の瞬間の様子（相互作用の種類など）に依存しない。しかしビリヤードやカーリングでは球・ストーンのどこで衝突させどの方向に散乱させるかに興味がある。また天体や素粒子などにおいても衝突の途中の様子や散乱角と運動量の関係なども知りたい場合がある。たとえば隕石と惑星の衝突、加速器で

の素粒子の衝突など。この問題は散乱問題とよばれ相互作用の詳細を明らかにして運動量保存則とエネルギー保存則、さらに後述する角運動量保存則などを駆使して解く。

§ 30. 撃力

質点に瞬間的に外力を加えて運動を変えることを考える。野球やサッカーなどで見られるようにボールにこのような力を加えると劇的に軌道が変化する。その変化後の軌道は瞬間的な外力、撃力 (impulse) に依存している。

撃力は次のような時間の函数として与えられる：

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} \mathbf{F} & 0 \leq t \leq \Delta t \\ \mathbf{0} & t < 0, \Delta t < t \end{cases} \quad (30.1)$$

つまりごく短い時間 Δt の間だけ力 \mathbf{F} が質点に働く。

まずは簡単のため $t = 0$ で静止している質点を考えよう。運動方程式は、

$$m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t), \quad (30.2)$$

である。ここで $\mathbf{v}(t)$ は質点の速度で初期条件 $\mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{0}$ を満たす。両辺を時刻 $t = 0$ から $t = \Delta t$ まで積分すると、

$$m\mathbf{v}(\Delta t) - 0 = \int_0^{\Delta t} dt' \mathbf{F}(t') = \mathbf{F}\Delta t. \quad (30.3)$$

したがって、

$$\mathbf{v}(\Delta t) = \frac{\Delta t}{m} \mathbf{F}, \quad (30.4)$$

がわかる。撃力によって速度は大きさ $|\mathbf{F}|\Delta t/m$ まで加速し、そのあとは撃力に関係なく自由に運動する。この式からわかるように速度の大きさを変えるには撃力を大きくするか、撃力が加わる時間 Δt を長くするかすれば良い。速度の初期条件が $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ のときは、

$$\mathbf{v}(\Delta t) = \mathbf{v}_0 + \frac{\Delta t}{m} \mathbf{F}, \quad (30.5)$$

となる。

撃力以外に外力 $\mathbf{F}_{\text{ex}}(t)$ があつたとする。外力 \mathbf{F}_{ex} は撃力に比べ小さいが常に働くとする (たとえば重力、空気抵抗など)。すると撃力がはたらく時間 Δt の間での力積の寄与は小さくそれほど質点の運動を変えないと仮定できる。たとえば一様重力場 $\mathbf{F}_{\text{ex}} = -m\mathbf{g}$ のもとで初速 \mathbf{v}_0 の質点に撃力を加えるとその間は (30.5) が成り立つ。時刻 $t = \Delta t$ のあとは初速 $\mathbf{v}(\Delta t)$ の一様重力場下の放物線運動をする。たとえば野球の投球と打球はこのような関係にあり、投手の球速が v_0 であり打撃が撃力 \mathbf{F} に対応する。

壁に質点をぶつけたとき壁は微動だにせず質点を跳ね返す。衝突の間、質点は壁から撃力を受けるのである。壁が $x = 0$ の位置にある yz 平面だとしよう。はじめの速度を \mathbf{v} として x

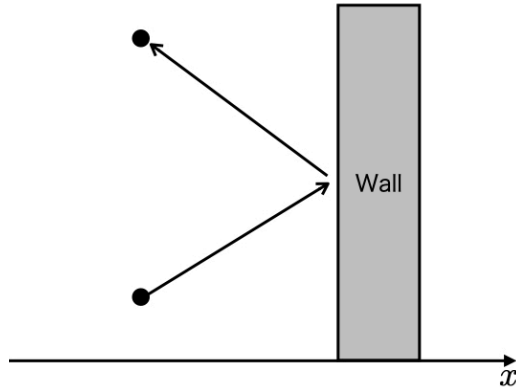


図 60 壁との衝突

軸の負の側から壁に向かっており、壁と衝突した後の速度を \mathbf{v}' とおく。質点の質量を m とすると運動量保存則より、

$$m(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) = \Delta t \mathbf{F}, \quad (30.6)$$

が成り立つ。ここで \mathbf{F} は壁から受ける撃力。壁からの撃力を詳しく調べよう。

衝突の瞬間、質点と壁は接触しており互いに作用・反作用を及ぼしあっている。壁と垂直な方向に注目すると、質点が壁の向こう側へ抜けることはできないのは、壁が垂直抗力 \mathbf{N} をはたらかせて質点を止めるからである。このとき垂直方向の運動エネルギーは $mv_x^2/2$ から 0 まで減少する。垂直方向のエネルギー保存則からこの分のエネルギーが壁と質点に再分配されなければならない。壁は速度を持たないとして壁と質点の間の反発係数を

$$e = -\frac{v'_x}{v_x}, \quad (30.7)$$

で定義する。すると $v'_x = -ev_x$ で与えられる。あとの垂直方向の運動エネルギーは $me^2v_x^2/2$ であり $0 \leq e \leq 1$ のことから必ずはじめより非増加である。減少した分のエネルギー $m(1 - e^2)v_x^2/2$ は音や熱のエネルギーとして散逸したと考えられる。 $e = 1$ の場合、壁への散逸はなく質点の運動エネルギーはそっくりそのまま返され、はじめと真反対の速度をもつ。

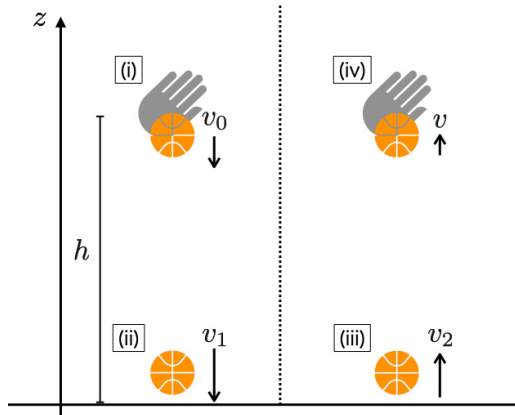
次に水平方向に注目すると、壁と質点の間に摩擦力がはたらく。摩擦力が水平方向の速度 $v_h = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$ を減速させる。摩擦力の働く時間は垂直抗力が働いている間だけなので必ずしも運動を止めない。衝突時間を Δt とし動摩擦係数を μ' とすると運動量と力積の関係から、

$$mv_h + \int_0^{\Delta t} dt' \mu' N(t') = mv'_h, \quad (30.8)$$

が成り立つ。もし摩擦が存在しなければ水平方向の速度は保存され $mv_h = mv'_h$ である。反対に動摩擦力が v_h を 0 まで減速した場合、今度は静止摩擦力 \mathbf{f} が働き水平方向の運動エネルギーはなくなる。ゆえに衝突後は壁と垂直に跳ね返ることが予想される。しかしよほど摩擦係数が大きくない限りは衝突時間が非常に短いのでこの影響は無視できる。

PROBLEM

PROBLEM1. バasketボールをドリブルするために必要な垂直方向の手の力の大きさを求めよ。ただしボールは質量 m の質点として扱い、床とボールの反発係数を e 、手までの高さを h 、力を加える時間を Δt とする。



SOLUTION. ボールの水平方向の運動は無視して、鉛直上向き、床を高さ 0 とする z 軸でボールの運動を観測する。まずドリブルを 4 つの瞬間に分けよう; (i) 手を離れる瞬間, (ii) 床に衝突する直前, (iii) 床に衝突した直後, (iv) 手まで戻る直前. (i) でのボールの速度を v_0 , (ii) での速度を v とすると力的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2.$$

これを解けば

$$v = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

ボールは下向きに運動しているので負号に注意せよ。

次に (iii) での速度を v_2 とすると反発係数の定義より

$$v_2 = -ev_1 = e\sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

と求まる. (iv) での速度を v とすれば再びエネルギー保存則により

$$\frac{1}{2}mv_2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh,$$

が成立する. これを解けば

$$v = \sqrt{e^2v_0^2 - 2gh(1 - e^2)}.$$

$v_0 < 0$ かつ v が実数であるためには

$$v_0 \leq -\sqrt{2gh\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)},$$

でなければならない. よってこれを満たす v_0 となるような力を手からボールに加えればドリブルを続けることができる. 速度 v から v_0 に変える撃力の式

$$m(v_0 - v) = \Delta F,$$

を解けば

$$F = \frac{m}{\Delta t} \left(v_0 - \sqrt{e^2 v_0^2 - 2gh(1 - e^2)} \right).$$

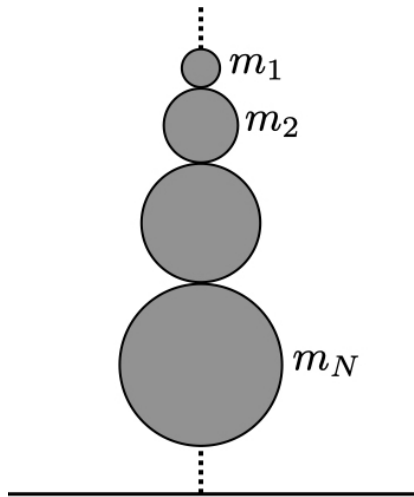
初速の条件を適用すれば力の大きさに対して

$$|F| \geq \frac{m}{\Delta t} \sqrt{2gh \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right)}.$$

PROBLEM2. 多段式垂直衝突球: 2つの重さの異なるボールを重い方を下にして積み重ねて同時に高さ h の位置から自由落下させる.

- (I) 床に完全弾性衝突して跳ね返るとき上に積まれた軽いボールの最高到達点の高さを求めよ.
- (II) 質量比の極限 $m_1/m_2 \rightarrow 0$ での最高到達点を求めよ.
- (III) 質量 $m_1 < m_2 < \dots < m_N$ のボールが N 個あって、それらを重いものから順に積み重ねたときの最高到達点を同様に調べよ.

ただしボールは質点とみなし、ボールどうしも完全弾性衝突するとする.



SOLUTION.(I) 床に原点をとる. はじめ自由落下しているのて、床に衝突する直前の速度を v_i ($i = 1, 2$) とすると 2つのボールはエネルギー保存則により

$$m_i gh = \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

が成立する. これより $v_i = -\sqrt{2gh} =: -v$ であり 2つのボールはほぼ同時に床まで到達する.

先に床に衝突するのは下にある重い m_2 のボールである. 運動量保存則により衝突直後の重いボールの速度は反転し、鉛直上向きに $v = \sqrt{2gh}$ を持っている. したがってこの重いボールは上に積まれた軽いボールと衝突する. 運動量保存則により衝突後の速度をそれぞれ v'_1, v'_2 とおくと

$$m_1(-v) + m_2 v = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad 1 = \frac{|v'_1 - v'_2|}{2v}$$

が成立する. 重いボールが軽いボールを追い越すことはないので $v'_1 - v'_2 > 0$ に注意して解けば

$$v'_1 = \frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}, \quad v'_2 = \frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}.$$

軽いボールについては $3m_2 > m_1$ より必ず鉛直上向きに跳ね返り、重いボールは質量の差によって運動の向きが変わる。軽いボールの最高到達点を h_1 とするとエネルギー保存則により

$$\frac{1}{2}m_1v_1'^2 = mgh_1,$$

なので結局

$$h_1 = \left(\frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h = \left(\frac{4m_2}{m_1 + m_2} - 1\right)^2 h > h,$$

となる。最後の不等式では $m_1 + m_2 < 2m_2$ であることを用いた。つまり軽いボールは元の高さより高い地点にまで跳ね返されることがわかる。

(II) 前問の結果で $m_1/m_2 \rightarrow 0$ の極限をとるために $\alpha = m_1/m_2$ で書き換えると

$$h_1 = \left(\frac{4}{\alpha + 1} - 1\right)^2 h,$$

である。したがって $\alpha \rightarrow 0$ とすれば直ちに $h_1 \rightarrow 9h$ がわかる。つまり軽い方のボールは最大で元の高さの9倍まで跳ね上がることができる。

(III) N 個積み重ねた場合を考える。床に衝突する直前ですべてのボールは $-v = -\sqrt{gh}$ を持っている。まず一番下の質量 m_N のボールが床と衝突して $v = \sqrt{gh}$ を得てすぐ上の質量 m_{N-1} のボールと衝突する。ここでの計算は2つの場合と全く同様で

$$v'_{N-1} = \frac{3m_N - m_{N-1}}{m_{N-1} + m_N} \sqrt{2gh}, \quad v'_N = \frac{m_N - 3m_{N-1}}{m_{N-1} + m_N} \sqrt{2gh}.$$

次に $N-1$ 番目のボールは $N-2$ 番目のボールと衝突する。衝突後の速度を v''_{N-1} , v'_{N-2} とおくと

$$m_{N-2}(-v) + m_{N-1}v'_{N-1} = m_{N-2}v'_{N-2} + m_{N-1}v''_{N-1}, \quad 1 = \frac{|v'_{N-2} - v''_{N-1}|}{|-v - v'_{N-1}|},$$

が成立する。これを解くと

$$v'_{N-2} = \frac{2m_{N-1}v'_{N-1} + (m_{N-1} - m_{N-2})v}{m_{N-2} + m_{N-1}}, \quad v''_{N-1} = \frac{m_{N-1} - m_{N-2}}{m_{N-2} + m_{N-1}} v'_{N-1},$$

となる。この計算は残りの任意の i 番目と $i-1$ 番目のボールどうしにも適用できる。つまりはじめ i 番目は上向きに速度 v'_i を持っていて、下向きに速度 $-v$ をもつ $i-1$ 番目のボールと衝突してそれぞれ v''_i , v'_{i-1} になったとすると

$$v'_{i-1} = \frac{2m_i v'_i + (m_i - m_{i-1})v}{m_{i-1} + m_i}, \quad v''_i = \frac{m_i - m_{i-1}}{m_{i-1} + m_i} v'_i,$$

と計算される。これを繰り返して最後に最も軽いボールに衝突して跳ね上がっていく。ここで重要なのは左の漸化式である。漸化式を解くために質量比 $\alpha_i = m_{i-1}/m_i$ を導入して

$$v'_{i-1} + v = \frac{2}{1 + \alpha_i} (v'_i + v), \quad v'_{N-1} = \frac{3 - \alpha_N}{1 + \alpha_N} v,$$

と変形する。これを繰り返し用いて

$$v'_1 + v = \frac{2}{1 + \alpha_2} \frac{2}{1 + \alpha_3} \cdots \frac{2}{1 + \alpha_{N-1}} (v'_{N-1} + v) = \frac{2^N}{\prod_{i=2}^N (1 + \alpha_i)} \cdot v,$$

が得られる。よって最も軽いボールの最高到達点は

$$h_1 = \frac{v_1'^2}{2g} = \left[\frac{2^N}{\prod_{i=2}^N (1 + \alpha_i)} - 1 \right]^2 h,$$

と求まる.

質量比 $\alpha = m_1/m_N \rightarrow 0$ の極限を考えたい. そこで相加相乗平均の関係式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N \frac{1}{1+\alpha_i} &\geq \left(\prod_{i=2}^N \frac{1}{1+\alpha_i} \right)^{1/(N-1)} \\ \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N \frac{\alpha_i}{1+\alpha_i} &\geq \left(\prod_{i=2}^N \frac{\alpha_i}{1+\alpha_i} \right)^{1/(N-1)} \end{aligned}$$

が成り立つことに注目する. 二式の左辺の和は 1 に等しく, さらに $\prod_{i=2}^N \alpha_i = m_1/m_N = \alpha$ であるから

$$\left(\prod_{i=2}^N \frac{1}{1+\alpha_i} \right)^{1/(N-1)} \leq \frac{1}{1+\alpha^{1/(N-1)}},$$

が成立する. 等号成立条件はすべての質量比が等しい $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_N$ のときである. これから最高到達点は

$$h_1 \leq \left[2^N \left(\frac{1}{1+\alpha^{1/(N-1)}} \right)^{N-1} - 1 \right]^2 h$$

となる. 結局 $\alpha \rightarrow 0$ の極限では $h_1 \rightarrow (2^N - 1)h$ となる.

§ 31. 単位と次元

物理において非常に重要な意味をもつのは各物理量の**単位** (unit) である. 単位がそろっていないければ物理量は比較することができない. この「単位がそろおう」ということには 2 つの意味がある. 1 つには単位の**スケール**が同じかということである. たとえば mm と m, km, あるいはフィート, 寸などの異なる単位どうしを直接比べることはできない. もう 1 つは物理量としてそろっているかということである. いま例に挙げた単位はすべて「長さ」の単位である. 他には「面積」の単位, 「質量」の単位, 「時間」の単位などがある. これらはそもそも物理量として異なっているために比較できない. このような単位のクラスを物理量の**次元** (dimension) という.

物理量 A の次元を $[A]$ と書くことにする. 次元は掛け算を保っていて

$$[AB] = [A] \cdot [B],$$

が成り立つ.

では Newton 方程式をみてみよう:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (31.1)$$

ここには物体の位置 \mathbf{r} , 時間 t , 質量 m , それからはたらく力 \mathbf{F} が現れる. 位置はどの成分も長さの次元 L をもっていて $[\mathbf{r}] = L$ である. 時間は時間の次元 $[t] = T$, 質量は質量の次元 $[m] = M$ をもっている.

物理量 A を別の物理量 B で微分したものの次元はその定義から、

$$\left[\frac{dA}{dB} \right] = [A] \cdot [B]^{-1},$$

である。たとえば速度は座標の時間微分だから、次元は $[v] = LT^{-1}$ となる。加速度はその速度を時間微分した量なので $[a] = LT^{-2}$ の次元を持っている。物理量の次元はそろっていないと比べできないから、運動方程式の両辺で次元は同じでなければならない。したがって力の次元は、

$$[F] = [ma] = MLT^{-2}, \quad (31.2)$$

となる。そこで Newton 方程式を扱う限りは 3 つの次元 M, L, T に対応する単位をそれぞれとってこれば良いことになる。

物理ではこれらに対して一つの**単位系**というものをとってくる。単位系とは系を記述するための基本的な物理量の単位の組みのことである。たいていは **MKS 単位系**というものを選んで、

$$L \mapsto \text{m(メートル)}, \quad M \mapsto \text{kg(キログラム)}, \quad T \mapsto \text{s(秒)},$$

とする。力の単位は $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ となる。この単位は特にニュートンとよばれ N と表記する。

もう一つ有名な **CGS 単位系**では、

$$L \mapsto \text{cm(センチメートル)}, \quad M \mapsto \text{g(グラム)}, \quad T \mapsto \text{s(秒)},$$

と選ぶ単位系もある。¹²⁾ 力の単位は $\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$ であり dyn(ダイン) という表記をされる。こちらは天文学・宇宙論などでよく用いられるが本稿では採用しない。

運動量とエネルギーの次元は

$$[p] = [mv] = MLT^{-1}, \quad [E] = [mv^2/2] = ML^2T^{-2}, \quad (31.3)$$

である。運動量は SI 単位系では $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ であり、CGS 単位系では $\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ 。エネルギーはそれぞれ特別な名前がついていて、SI 単位系では $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ を J (ジュール) と表記する。CGS 単位系では $\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ を erg (エルグ) と表記する。

$[A] = 1$ のとき A は**無次元量**であるという。たとえば角度がそうである。角度の単位は° (度) もしくは rad (ラジアン) であるがどちらも次元としては 1 である。そうでなければ上の Newton 方程式のつじつまが合わなくなる。振り子や円運動のときを思い出してみよう。 $x(t) = r \cos \theta$ などとおいたが、この r は円運動の半径 (または振り子の腕の長さ) であった。したがって $[r] = L$ であり $\cos \theta$ は無次元量でなければならない。これは $\cos x$ の Taylor 展開が、

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots,$$

であるために、もし x が次元をもってしまうと次々に次元の異なる量が右辺に現れてしまう。これでは次元がそろわず不都合である。一般に三角関数や指数関数などの引数は無次元量でなければならない。

¹²⁾ Gauss 単位系とも呼ばれる。

M^0	L^0	L^1	L^2
T^0	無次元量, 角度	長さ, 座標	面積
T^{-1}	角速度	速度	面積速度
T^{-2}	角加速度	加速度	(面積加速度)

表 1 次元と対応する物理量の例 (M^0)

M^1	L^0	L^1	L^2
T^0	質量	-	慣性モーメント
T^{-1}	質量流量	運動量, 力積	角運動量
T^{-2}	バネ定数	力	エネルギー, 力のモーメント

表 2 次元と対応する物理量の例 (M^1)

積分についても微分と同様に考えることができる。つまり A を B で積分すると定義から $[\int dB A] = [AB]$ の次元を持つことになる。たとえば仕事は $W = \int dt \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$ だから次元としては $[W] = T \cdot LT^{-1} \cdot MLT^{-2} = ML^2T^{-2}$ をもつ。 $1/A$ の積分 $\ln A$ は注意が必要である。対数関数の引数も無次元量でなければならないが、 A が次元をもってしまっている。しかし定積分では $\ln A_1 - \ln A_0$ のような差の形になり、対数関数の性質からこれは $\ln(A_1/A_0)$ となる。 A_1 と A_0 は同じ次元をもつから引数は無次元量である。物理学では対数関数の引数が無次元になるようにする。

無次元量にもしばしばその数値がどの物理量を表しているかを明確にするために名前が与えられることがある。角度 (度, rad) はその代表例である。無次元量は流体力学において特に重要な役割を果たす。

PROBLEMS

PROBLEM1. **圧力**: 面積 S の平面に力 F が作用しているとき、面積あたりに働く力 $P = F/S$ の次元を求めよ。また MKS 単位系, CGS 単位系で表せ。

SOLUTION. 力の次元は $[F] = MLT^{-2}$, 面積は $[S] = L^2$ なので $[P] = ML^{-1}T^{-2}$ である。MKS 単位系では $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ であり通常 Pa (パスカル) と表記される。また CGS 単位系では $\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ であり通常 bar (バール) と表記される。

PROBLEM2. **FPS 単位系**: 長さの単位を ft (フィート), 質量の単位を lb (ポンド), 時間の単位を s (秒) とする単位系を選ぶ。このとき力, エネルギーの単位を求めよ。

SOLUTION. 力の次元は $[F] = MLT^{-2}$, エネルギーは $[E] = ML^2T^{-2}$ なので, FPS 単位系に置き換えるとそれぞれ $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^{-2}$, $\text{lb} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ である。特に力の単位は pdl (パウンドル) と表記される。

第 3 章 振動論

§ 32. 単振動

この節からしばらく一次元系を考えよう．原点からの変位と逆向きに大きさ kx の力がはたらくとき，運動方程式は，

$$ma = -kx. \quad (32.1)$$

ポテンシャルエネルギーは $V(x) = kx^2/2$ が存在するのでこの力は保存力である．したがってエネルギー保存則が成り立って，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const}, \quad (32.2)$$

となる．たとえばゴムひもやバネをのばしたとき物体にはたらく力はこのような法則に従う (**Hooke の法則**)．この力は物体が原点から離れるほど原点へ戻そうとするので**復元力**とよばれる．

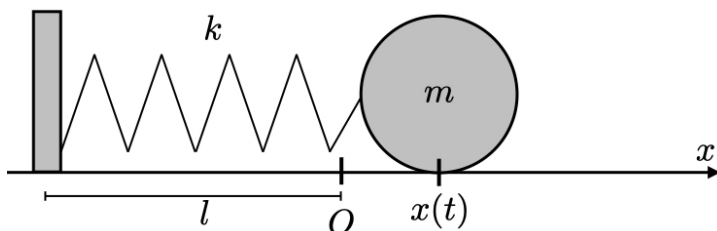


図 61 バネにつながれた質点の運動

バネの一方を壁に，もう一方には質量 m の物体をとりつける．この m に比べてバネ自身の質量はとても小さく無視できるものとする．バネに何の力もはたらいていないときのバネの長さを自然長という．この自然長 l からの伸びを x とすると（負のときは縮み），バネは伸びを戻そうとする力を物体に作用させる．バネの復元力は Hooke の法則にしたがい運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad (32.3)$$

となる．ここに現れる比例定数 k をバネ定数といい，その値はバネの材質などによって異なり k が大きいほど固いバネである． x の原点は自然長のときの物体の位置

物体を原点から $x = A$ まで引っ張ってそっと放す。つまり初期条件 $x(0) = A, v(0) = 0$ 。するとバネは収縮して物体を引っ張り原点まで戻す。そして収縮しきると今度はバネは伸張に転じこれをくりかえす。ポテンシャルが放物線であることから物体はその内側で有界運動することがわかる。このような運動を振動という。

初期条件 $x(0) = A, v(0) = 0$ のもとで運動方程式を解こう。そのために $\omega = \sqrt{k/m}$ という量を導入して方程式を、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

と書き換えてみる。この方程式の解 $x(t)$ は 2 回微分すると元の函数形に戻って係数に $-\omega^2$ がでてくる。そのような函数としては三角函数 $\sin \omega t, \cos \omega t$ が考えられる。そこで解を $x(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ とおいてみよう。 c_1, c_2 は時間によらない定数。するとたしかに上の運動方程式を満たすことが確かめられるだろう。初期条件より $t = 0$ のとき $x = A, v = 0$ であるから、

$$A = c_2, \quad 0 = c_1 \omega.$$

$\omega \neq 0$ だから結局解は、

$$x(t) = A \cos \omega t, \tag{32.4}$$

と求まる。

エネルギー保存則の式から求めることもできる。保存するエネルギーを E として整理すれば、

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{1}{2} k x^2 \right)}.$$

変数分離の後、両辺を時間で積分して、

$$\int_0^t dt = \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{1}{2} k x^2 \right)}}.$$

初期条件から $t = 0$ でのエネルギーは $E = kA^2/2$ であるから、

$$t = \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)}} = \frac{1}{\omega} \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

$x = A \cos \theta$ とおくと、積分要素は $dx = -A \sin \theta d\theta$ で積分区間は $0 \rightarrow \theta$ になって、

$$t = -\frac{1}{\omega} \int_0^\theta d\theta = -\frac{\theta}{\omega}. \tag{32.5}$$

したがって $\theta = -\omega t$ となるが、変数変換の式から最終的に同じ結果 $x(t) = A \cos \omega t$ が得られる。

解が三角函数であるから予想通り物体は $x = A$ と $x = -A$ の間で往復する運動をする。この往復の幅 A を振動の振幅 (amplitude) といいこの物体の運動を**単振動**という。 ω は角振動

数 (angular frequency) とよばれる。その意味は後述する。また 1 往復にかかる時間 T は、 $A = A \cos \omega T$ より $T = 2\pi/\omega$ となる。これを振動の周期という。

測り始める時刻を変えてみよう。つまり $t = 0$ からではなく $t = t_0$ から測り始めるとする。すると初期条件が $t = t_0$ のとき $x(t_0) = A, v(t_0) = 0$ にとって代わるので解は、

$$x(t) = A \cos \omega(t - t_0), \quad (32.6)$$

となる。あるいは $\delta = \omega t_0$ とおくと、

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta), \quad (32.7)$$

となる。つまり解は ωt 方向に δ だけずれる。この量を位相 (phase) という。位相が異なると振動のタイミングはずれるが振幅や周期は同じになる。加法定理より、

$$x(t) = A \cos \delta \cos \omega t + A \sin \delta \sin \omega t.$$

$A \cos \delta = c_1, A \sin \delta = c_2$ とおけば、

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t,$$

となる。これは一つ目の解法で天下りに仮定したものであった。単振動の解には 2 つの決めべき定数 A と δ あるいは c_1 と c_2 が含まれている。はじめの運動方程式が 2 階の微分方程式であったため、解はこれを 2 階積分したものと考えられる。積分には定まらない積分定数がかならずあらわれるのでこのような初期条件によって定めなければならない定数が一般解には出現するのである。

さらに次の Euler の公式を用いれば解を指数関数で表すことができる：

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

これを逆に解くことで上の解は¹⁾、

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c_1 - ic_2}{2} e^{i\omega t} + \frac{c_1 + ic_2}{2} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{C}{2} e^{i\omega t} + \frac{C^*}{2} e^{-i\omega t} \\ &= \operatorname{Re} \left(C e^{i\omega t} \right). \end{aligned}$$

ここで $C = c_1 - ic_2 \in \mathbb{C}$ 。このようにして $e^{i\omega t}$ という関数も振動を表すことがわかる。位相を使った表式からも同様にすれば、

$$x(t) = \frac{A}{2} \left(e^{i(\omega t - \delta)} + e^{-i(\omega t - \delta)} \right) = A \cdot \operatorname{Re} \left(e^{i(\omega t - \delta)} \right). \quad (32.8)$$

¹⁾ Euler の公式から三角関数は、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

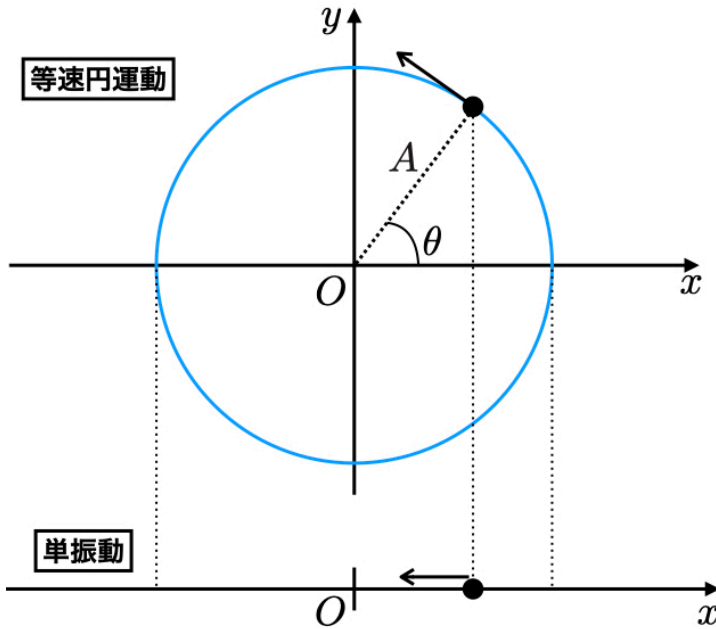


図 62 等速円運動のの射影としての単振動

ところでこの解は円運動の式と似ている．二次元平面上での円運動の解は，

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \sin \omega t,$$

であり， A は円運動の半径， ω は角速度であった．一方単振動の解 $x(t) = A \cos(\omega t - \delta)$ では A は振動の振幅， ω は振動の角振動数である．また円運動においても測り始める角度を変えれば位相 δ に対応する物理量を考えられる．ゆえに円運動する物体の影を一次元の軸（たとえば x 軸）に落とす（射影する）とその影は単振動してみえる．単振動における角振動数 ω は円運動での角速度が対応していて，単位時間あたりの角度の変化分を表す．角振動数を 2π で割ったもの $f = \omega/2\pi$ は単位時間あたりに何往復（円運動の場合は何周）したかを表し**振動数** (frequency) と呼ばれる．

次に振り子の微小振動について見てみよう．振り子は極座標表示 $x = l \sin \theta$, $y = -l \cos \theta$ をとると便利であった． l は振り子のひもの長さ．振り子の運動方程式は，

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -T \sin \theta, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= T \cos \theta - mg, \end{aligned}$$

である． T はひもの張力， g は重力加速度， m はおもりの質量．微小な振動 $\theta_0 \ll 1$ のとき，三角関数は $\sin \theta \sim \theta$, $\cos \theta \sim 1$ と近似できる．この近似によって $x \sim l\theta$, $y \sim -l$ とみなせる．それゆえ y 軸方向には動かず $\ddot{y} \sim 0$ となり， $T \sim mg$ が運動方程式からわかる． x 軸方向の運動方程式は同じ近似により $ml\ddot{\theta} \sim -mg\theta$ となる． $\omega = \sqrt{g/l}$ とおけば $\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$ とな

り, 単振動の方程式と一致する. さらに周期は $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ と読み取ることができて, (27.4) に一致する.

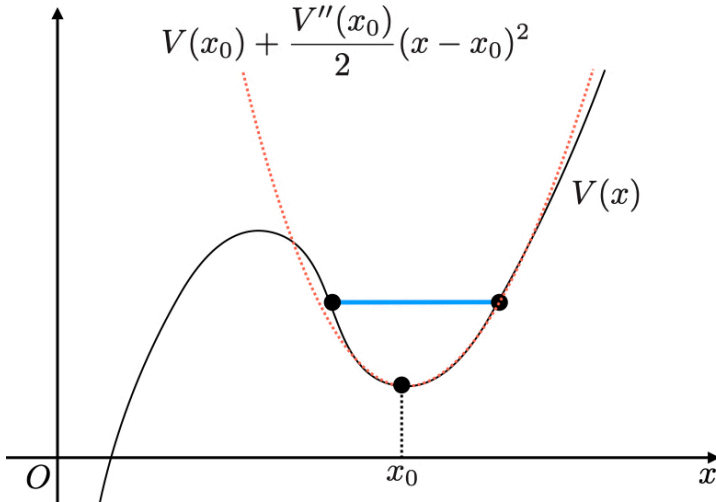


図 63 任意のポテンシャルの極小点近傍における近似

一般のポテンシャル $V(x)$ が $x = x_0$ で極小値をとるとしよう. このとき $V'(x_0) = 0$ かつ $V''(x_0) < 0$ を満たす. $x = x_0$ の近傍でポテンシャルを Taylor 展開すると,

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{V''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{V'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ &= V(x_0) + \frac{V''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3). \end{aligned}$$

もし物体がこの極小の点 $x = x_0$ のまわりで微小にしか運動しないならば $\mathcal{O}((x - x_0)^3)$ の項は他に比べて非常に小さいので無視できる. また第 1 項は定数であるから適当に基準をずらして消去できる. すなわち極小点の近傍で,

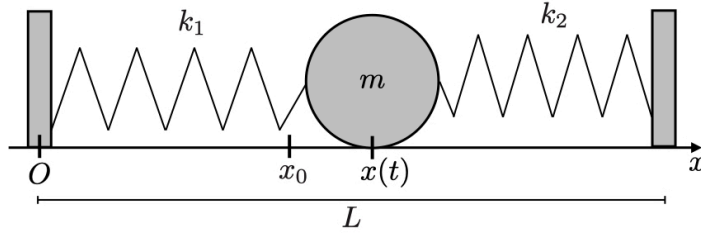
$$V(x) \simeq \frac{V''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2. \quad (32.9)$$

$k = -V''(x_0)/2!$ とおけばこれは Hooke の法則にしたがった運動に帰着される. どんなポテンシャル下でも極小点のまわりでの微小振動は単振動と見なせることがわかる.

PROBLEM

PROBLEM1. 幅が L の箱の中に質量 m の質点が自然長 l_1, l_2 , バネ定数 k_1, k_2 の 2 つのバネで両側の壁に繋がれている.

- (I) 質点が静止するときの力学的平衡点 x_0 を求めよ. ただし原点を左側の壁とする.
- (II) 質点が平衡点からずれた位置 x にあるときの運動方程式を導き, 初期条件 $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$ のもとでその解を求めよ.



SOLUTION. (I) 質点が静止するためには両側のバネから受ける二力が逆向きでなければならない。それゆえ $l_1 + l_2 > L$ のときには両方のバネが縮んでいなければならない, $l_1 + l_2 < L$ のときは両方も伸びている必要がある。前者の場合は $l_1 + l_2 - L$ だけ縮み, 後者の場合 $L - l_1 + l_2$ だけ伸びる。左側のバネの縮みを ξ_0 とおくと力のつり合いの条件は,

$$k_1 \xi_0 = k_2 (l_1 + l_2 - L - \xi_0),$$

となる。ただし ξ_0 が負のときは伸びを表し $l_1 + l_2 < L$ のときも成立。これを ξ_0 について解けば,

$$\xi_0 = \frac{k_2 (l_1 + l_2 - L)}{k_1 + k_2}.$$

この ξ_0 を用いて平衡点は $x_0 = l_1 - \xi_0$ と書ける。

(II) まず質点が受ける力を求める。左側のバネの縮みを ξ とすると, 質点は正(右)の方向に力 $k_1 \xi$ を受ける。このとき右側のバネは $l_1 + l_2 - L - \xi$ だけ縮んでいるので, 質点は負(左)の方向に力 $k_2 (l_1 + l_2 - L - \xi)$ を受ける。以上から質点の運動方程式は,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k_1 \xi - k_2 (l_1 + l_2 - L - \xi).$$

前問の結果と $x = l_1 - \xi$ という関係にあることに注意すれば x だけの方程式,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)(x - x_0),$$

を得る。これは平衡点からのずれ $x - x_0$ によるバネの力だけを考慮すれば良いということを示している。 $X = x - x_0$, $\omega := \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$ とおくと,

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\omega^2 X,$$

という単振動の方程式に帰着される。よって解は,

$$x(t) - x_0 = A \cos \omega t = A \cos \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} t,$$

となる。

PROBLEM2. 次のポテンシャル中での振動運動の周期を求めよ:

$$V(x) = A|x|^n, \quad n > 0.$$

また $n = 2$ のとき単振動の結果と一致することを確かめよ。

SOLUTION. 運動方程式は,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{d}{dx} (A|x|^n) = -nA|x|^{n-1}.$$

任意の n でこれは保存力でありエネルギーが保存する．エネルギー保存則の式は，

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + A|x|^n,$$

であるからこれを \dot{x} について解けば，

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)}.$$

変数分離をして x と t にわければ，

$$\int_0^t dt = \pm \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|^n)}},$$

という積分におちつく．ここで $X = (A/E)^{1/n}$ とおくと積分函数の分母は $\sqrt{E(1 - |x|/X)^n}$ となって方程式の右辺は，

$$(\text{r.h.s.}) = \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{|x|}{X}\right)^n}}.$$

この $x = \pm X$ のときにはエネルギー保存則の式から $\dot{x} = 0$ がわかる．すると $x = \pm X$ の点で質点の軌道は折り返すので質点は任意の n で周期運動する．その際の振幅は X となる．単振動での議論との類推から上の方程式を，

$$\int_0^T dt = 4\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{|x|}{X}\right)^n}},$$

と書き換える．右辺の4倍はポテンシャルが正側と負側で対称なため積分範囲を正側に限ったことからくる．また初期条件として $t = 0$ で質点は原点とした．積分を計算するためにさらに変数変換 $\xi = (|x|/X)^n$ をすると，

$$d\xi = \frac{n}{X} \left(\frac{|x|}{X}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{X} \xi^{(n-1)/n} dx \quad \begin{array}{l} x \mid 0 \rightarrow X \\ \xi \mid 0 \rightarrow 1 \end{array}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^1 d\xi \frac{X}{n} \xi^{-\frac{n-1}{n}} (1 - \xi^n)^{-1/2} \\ &= \frac{2\sqrt{2m}}{n} E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{n}} \cdot B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

ここで，

$$B(x, y) = \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1},$$

はベータ函数．ベータ函数はガンマ函数と次の関係がある：

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

この関係式から，

$$T = \frac{2\sqrt{2m}}{n} E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)},$$

となる。ここでガンマ函数の定義から、

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} dt t^{-1/2} e^{-t} = \sqrt{\pi}.$$

ゆえに周期の最終的な表式は、

$$T = \frac{2\sqrt{2\pi m}}{n} E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)},$$

となる。 $n = 2$ のときには、

$$T = \sqrt{2\pi m} \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2A}}.$$

よって $A = k/2$ とおけば調和振動子の結果に一致する。

§ 33. 減衰振動

物体の振動に対して速度に比例する抵抗 $F_R = -\alpha v$ がはたらく場合を考えよう。このとき振動の振幅はだんだん小さくなり、最終的に振動は止まることが予想される。運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha \frac{dx}{dt} - kx.$$

移項して整理すると、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad (33.1)$$

ここで

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{m}. \quad (33.2)$$

微分方程式を解くために

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - bx \right) - a \left(\frac{dx}{dt} - bx \right) = 0,$$

と変形する。もとの方程式と比べると、

$$a + b = -\gamma, \quad ab = \omega^2, \quad (33.3)$$

が成立する。よって a, b は λ についての 2 次方程式

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0.$$

の 2 解である。これを**特性方程式**という。これから、

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2}. \quad (33.4)$$

この 2 つの解を λ_{\pm} とおいて $a = \lambda_+, b = \lambda_-$ としよう。微分方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - \lambda_- x \right) - \lambda_+ \left(\frac{dx}{dt} - \lambda_- x \right) = 0,$$

見やすいように $\dot{x} - \lambda_- x = y$ とおいて

$$\frac{dy}{dt} - \lambda_+ y = 0,$$

とする. 両辺に $e^{-\lambda_+ t}$ をかければ

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\lambda_+ t} y \right) = 0,$$

となり, 両辺を積分すれば $y = C e^{\lambda_+ t}$ を得る (C は積分定数). x に戻せば

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_- x = C e^{\lambda_+ t},$$

今度は両辺に $e^{-\lambda_- t}$ をかければ

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\lambda_- t} x \right) = C e^{(\lambda_+ - \lambda_-)t},$$

両辺を積分して整理すれば

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t},$$

となり, λ_{\pm} をもちいて微分方程式の一般解が得られた. ただし c_1, c_2 は積分定数に起因する定数. これがはじめの微分方程式を満たすことは容易に確かめられる. ただし $\lambda_+ \neq \lambda_-$ でなければならない. 重解の場合はこの節の最後で議論する.

物体を原点から $x = A$ まで引っ張ってそっと放す初期条件 $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$ を課すと,

$$A = c_1 + c_2, \quad 0 = \lambda_+ c_1 + \lambda_- c_2.$$

したがって,

$$c_1 = \frac{A \lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+}, \quad c_2 = -\frac{A \lambda_+}{\lambda_- - \lambda_+}.$$

ゆえに,

$$x(t) = -\frac{A}{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}} (\lambda_- e^{\lambda_+ t} + \lambda_+ e^{\lambda_- t}). \quad (33.5)$$

この解で表される物体の運動は特性方程式の判別式によって異なる振る舞いをする. 判別式は

$$D = \gamma^2 - 4\omega^2. \quad (33.6)$$

$D < 0$ で 2 実解をもたないとき,

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm i \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}},$$

となって解は,

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot e^{i\sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t} + c_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot e^{-i\sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}t}, \quad (33.7)$$

となる. それぞれの項の 2 つ目の指数関数部分は虚数 i を含むので, 角振動数 $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2/4}$ で振動する. 一方で 1 つ目の指数関数部分は時間とともに急激に減衰する.

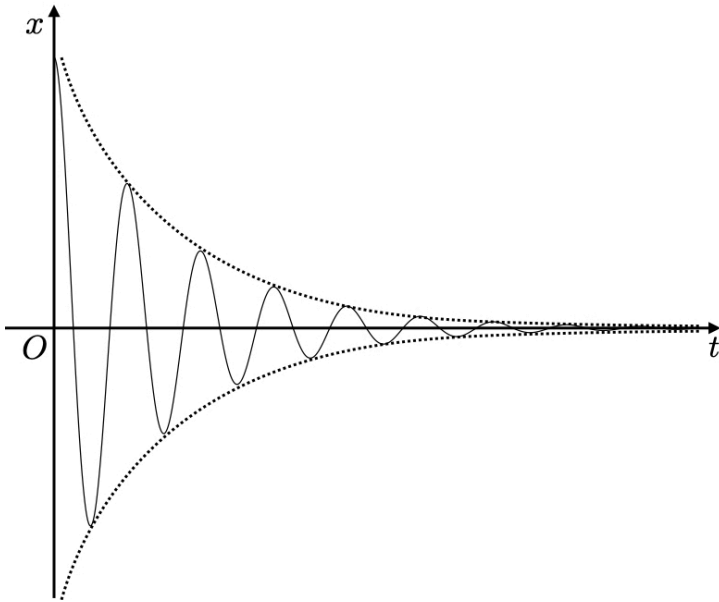


図 64 減衰振動

したがってこの解では振動するがその振幅が指数函数的に減少していく減衰振動である。十分時間が経つと振幅は 0 に近づき物体は自然長で静止する。

$$x(t \rightarrow \infty) = 0, \quad v(t \rightarrow \infty) = 0.$$

次に $D > 0$ で特性方程式が異なる 2 実解を持つとき解は、

$$x(t) = c_1 e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2}\right)t} + c_2 e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2}\right)t}, \quad (33.8)$$

でありどこにも振動する項が現れず減衰する項のみとなる。これを過減衰という。過減衰では時間が経つにつれバネのノビは単調に減少していき十分時間が経つと原点で静止する。

減衰振動では（過減衰のときにも）最終的には運動はストップする。質点に注目するとはじめのエネルギーが保存せず、抵抗によって散逸してしまっている。そこで減衰があるときのエネルギーの式を導こう。(33) の両辺に \dot{x} をかけて、時間 0 から t まで積分すれば、

$$\frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 + \frac{k}{2} x(t)^2 + \alpha \int_0^t dt' \dot{x}(t')^2 = E_0. \quad (33.9)$$

E_0 ははじめの時刻での前 2 項の値である。初期条件を上と同様に $t = 0$ で $x = A$, $\dot{x}(0) = 0$ とすると、はじめの時刻では $E_0 = kA^2/2$ である。力学的エネルギーを $E_{\text{mech}} = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$ とおくとその時間変化は、

$$\frac{dE_{\text{mech}}}{dt} = -\alpha \frac{d}{dt} \int_0^t dt' \dot{x}(t')^2 = -\alpha \dot{x}(t)^2, \quad (33.10)$$

となって、振動子の全エネルギーは速度の2乗に比例して常に減少する。

最後に特性方程式が重解 $\lambda_+ = \lambda_- = -\gamma/2$ の場合に触れよう。重解を持つためには判別式より $\gamma = 2\omega$ である。微分方程式は同様に

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{\gamma}{2}x \right) + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{\gamma}{2}x \right) = 0,$$

と変形できて、両辺に $e^{\gamma t/2}$ をかけて積分すると $\dot{x} + \gamma x/2 = Ce^{-\gamma t/2}$ がわかる。さらに両辺に $e^{\gamma t/2}$ をかけて積分すれば

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\gamma t/2}, \quad (33.11)$$

となる。これが重解の場合の一般解で振動はせず減衰因子のみである。過減衰と減衰振動の境界という意味で**臨界減衰**という。

§ 34. 振動の二体問題

質点がバネなどでつながれて互いに影響を及ぼし合いながら振動することを連成振動 (coupled vibration) という。ここでは質点が2つの場合に限り、その簡単な例を取り上げる。

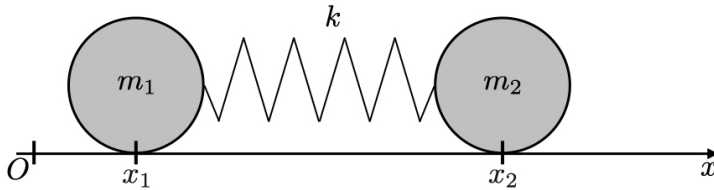


図 65 バネで繋がれた2質点

1つ目の例では2つの質点 (質量 m_1, m_2) がバネ定数 k , 自然長 l のバネで繋がれているとする。この2質点を少し引っ張って静かに放すと振動し始める。適当なところに原点をとりバネに沿って x 軸を用意する。ある時刻での質点の位置は x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) とし、そのときのバネの伸びを $\xi = x_2 - x_1 - l$ と書こう。質点に働く力はそれぞれ $k\xi$ と $-k\xi$ である。それゆえ質点の運動方程式は、

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= k(x_2 - x_1 - l), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k(x_2 - x_1 - l), \end{aligned} \quad (34.1)$$

となる。形に注目すると右辺は相対座標 $x_{\text{rel}} = x_2 - x_1$ にのみ依存する。したがって二体問題 §28 の議論を適用することができる。つまり運動方程式は相対座標 x_{rel} と重心座標 $x_G = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/M$ ($M = m_1 + m_2$ は全質量) に分解できる。(34.1) の和をとると $M\ddot{x}_G = 0$ となり、重心座標が等速直線運動することがわかる。(34.1) の2つ目に m_1 をかけ、1つ目に m_2 をかけたものの差をとると $\mu\ddot{x}_{\text{rel}} = -k(x_{\text{rel}} - l)$ となる。ここで

$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ は換算質量. $\xi := x_{\text{rel}} - l$ とおけば $\ddot{\xi} = -\omega^2 \xi$ という単振動の運動方程式に帰着する. ここで $\omega = \sqrt{k/\mu}$ とおいた.

単振動の一般解は $\xi = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$. 初期条件を $x_G(0) = 0, \xi(0) = A, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = v_0$ とおけば $c_1 = A, c_2 = 0$ となって,

$$x_G(t) = v_0 t, \quad \xi(t) = A \cos \omega t, \quad (34.2)$$

と定まる. 元の質点の座標の解は,

$$x_1(t) = v_0 t - \frac{m_2}{M} (l + A \cos \omega t), \quad x_2(t) = v_0 t + \frac{m_1}{M} (l + A \cos \omega t). \quad (34.3)$$

第 1 項は並進運動を表し, 第 2 項は重心座標からの距離が単振動することを示している.

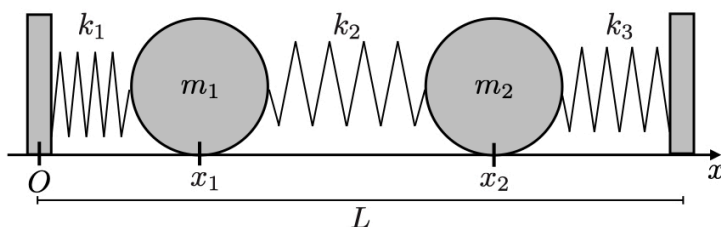


図 66 箱とバネで繋がれた 2 質点

2 つ目の例は箱の中に 2 つの質点 (質量 m_1, m_2) が 3 つのバネで繋がれている状況を考える (§32 の PROBLEM1 と同じ議論なので運動方程式の導出までは簡単な説明にとどめる). 3 つのバネのバネ定数を k_1, k_2, k_3 とする. 各質点がそれぞれ平衡点 (自然長の位置とは限らない) から x_1, x_2 だけずれているとき, 質点に働く力を求める. たとえばバネの自然長を l_1, l_2, l_3 とし $l_1 + l_2 + l_3 < L$ であるならば力がつり合っているときはバネは全て伸びていなければならない ($l_1 + l_2 + l_3 > L$ の場合は「縮み」に読み換える). 平衡点で働いている力は相殺するので考えなくて良い. したがって質点の平衡点からのずれをそれぞれ x_1, x_2 とするとき質点に働く正味の力は $-k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$ となる. 同様に質点 2 に働く正味の力は $-k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2$ となる.

運動方程式は,

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2, \end{aligned} \quad (34.4)$$

となる. このままだも方程式を解くことはできるが, 簡単のため $m_1 = m_2$ とし, 3 つのバネも全て同じもの $k_1 = k_2 = k_3 = k$ としよう:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -2k x_1 + k x_2, \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -2k x_2 + k x_1. \end{aligned} \quad (34.5)$$

1つ目の例と同じように二体問題の解法に従って2質点の重心座標と相対座標についての運動方程式に書き換える．2式の和から

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) = -k(x_1 + x_2), \quad (34.6)$$

よって質量 $M = 2m$ の重心座標 $x_G = (x_1 + x_2)/2$ はバネ定数 $2k$ で単振動する．他方で2式の差からは

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1) = -3k(x_2 - x_1), \quad (34.7)$$

となつて質量 $\mu = m$ の相対座標 x_{rel} はバネ定数 $3k$ で単振動する．

$\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$ とおくと，得られた2つの方程式は一体の振動の問題だからただちに一般解を

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1), \\ x_2 - x_1 &= 2A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2), \end{aligned} \quad (34.8)$$

と与えられる．これらからそれぞれの質点の軌道が

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2), \\ x_2 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2), \end{aligned} \quad (34.9)$$

と求まる．

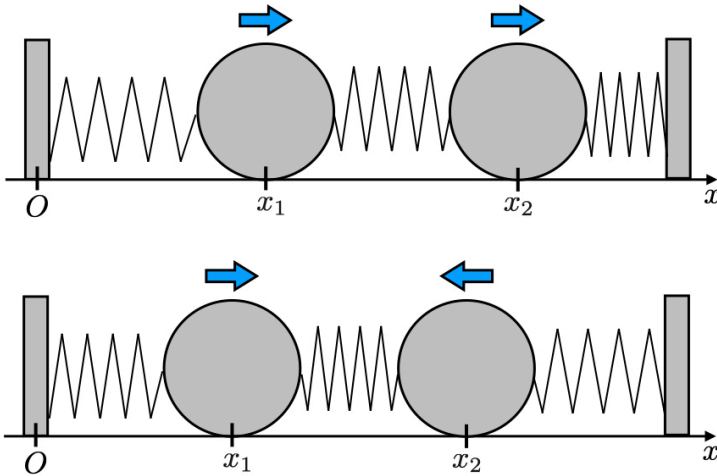


図 67 同位相と逆位相

書き換えた2組の方程式は重心座標と相対座標についての方程式と解釈できるが，この点について考察を加えよう．和 $x_1 + x_2$ の振動は2質点を質量 $2m$ の1つの質点とみなすような運動方程式である．そのため中央のバネが無視され有効的にバネ定数は $2k$ となる．もし初期条件として x_1 と x_2 を同じ方向へ同じ距離ずらす場合， $A_2 = 0$ となり相対座標の運動は消え

て重心座標の振動だけになる．よってこの場合 2 質点は同じ振幅と周期となり振動の向きも同じとなる．このような振動の仕方を**同位相**という．

他方で差 $x_2 - x_1$ は相対座標についてなので全てのバネが寄与してくる．初期条件として x_1 と x_2 を逆の方向へ同じ距離ずらす場合、 $A_1 = 0$ となり重心座標の運動は消えて相対座標の振動だけになる．2 質点は振幅や周期は同じだが振動の向きが逆になる．このような振動の仕方を**逆位相**という．

振動論の解はこのような振動の仕方の線型結合で表される．これを**重ね合わせの原理**という．重ね合わせの原理はもとの微分方程式が変数 x について線型であることに由来し、そのような運動方程式を持つすべての物理学において有効な原理である．たとえば（真空中の）電磁気学における Maxwell 方程式、量子力学における Schrödinger 方程式など．

次節ではこれら線型結合の解をシステムティックに導く数学的道具、線型代数学を紹介する．この方法は二体問題に限らず N 体の問題へ一般化され、さらには無限次元にも拡張可能である．無限次元の振動論については電磁気学の章で議論する．

§ 35. 行列

この節では線型な方程式を扱うために行列という量を導入する．次のように縦方向に m 列と横方向に n 列のマス目状に数値を配列したものを $M \times N$ の**行列** (matrix) という：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}. \quad (35.1)$$

この例ではそれぞれ 2×3 , 3×3 の行列である． $M = N$ の行列は特に N 次の**正方行列**という．また $N \times 1$ の行列は N 次元の列ベクトルに一致する．他方で $1 \times N$ の行列は N 次元の行ベクトルと呼ばれる．表記の都合上列ベクトルはカンマあり $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ で表し、行ベクトルはカンマなし $(a_1 a_2 \dots a_N)$ と表す．

行列は大抵は大文字のアルファベットで A, B などと表記される．行列の i 行目 j 列の要素を a_{ij} のように添字を並べて表記する．たとえば $M \times N$ 行列は一般に

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix},$$

のように書ける．成分がこのように並んでいることを 1 行で書きたい場合は $A = (a_{ij})$ と書く．また i 行 j 列目の要素 a_{ij} を A の (i, j) 成分という．

行列の和とスカラー倍はベクトルと同じように定義され 2 つの $M \times N$ 行列 $A = (a_{ij}), B =$

(b_{ij}) に対して

$$\begin{aligned} A + B &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1N} + b_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} + b_{M1} & a_{M2} + b_{M2} & \cdots & a_{MN} + b_{MN} \end{pmatrix}, \\ \lambda A &:= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{M1} & \lambda a_{M2} & \cdots & \lambda a_{MN} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (35.2)$$

と定義する.

$$i \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{iN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{Nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \cdots \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj} \cdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

図 68 行列の積

行列の積は少し特殊である. $M \times N$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $N \times L$ 行列 $B = (b_{ij})$ に対して積を

$$AB := \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N a_{1i} b_{i1} & \sum_{i=1}^N a_{1i} b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^N a_{1i} b_{iL} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N a_{Mi} b_{i1} & \sum_{i=1}^N a_{Mi} b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^N a_{Mi} b_{iL} \end{pmatrix}, \quad (35.3)$$

で定義する. AB は $M \times L$ の行列になっている. 積が定義できるためには左の行列の列と右の行列の行が一致していなければならない. 積は次の演算規則を満たす:

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C = ABC, \\ (A + B)C &= AB + AC, \\ (\lambda A)B &= A(\lambda B) = \lambda AB. \end{aligned} \quad (35.4)$$

N 次元の行ベクトル $A = (a_{1i})$ と列ベクトル $B = (b_{i1})$ の積は

$$\begin{aligned} AB &= \sum_{i=1}^N a_{1i} b_{i1}, \\ BA &= \begin{pmatrix} b_{11} a_{11} & b_{11} a_{12} & \cdots & b_{11} a_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} a_{11} & b_{N1} a_{12} & \cdots & b_{N1} a_{1N} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (35.5)$$

となる. つまり AB はベクトルの内積であり, BA はダイアドとよばれるベクトルから行列を作る演算である. ダイアドは 2 つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} に対して $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ と書いて (i, j) 成分が $a_i b_j$ であるような行列を返す演算として定義される.

$M \times N$ 行列 A に対して行と列を入れ替えた行列を**転置行列** (transpose) といい A^T とかく。成分では

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{M1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{M2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix}.$$

A の (i, j) 成分を a_{ij} とすると A^T の (i, j) 成分は a_{ji} である。明らかに $(A^T)^T = A$ である。

列ベクトルの転置を取ると行ベクトルになる。ゆえにベクトルの内積は $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$, ダイアドは $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T$ とかける。左辺はベクトルの内積で右辺は行列の積として解釈する。これまで位置ベクトルなどで登場したベクトルは列ベクトルであり, 行ベクトルはその転置として理解する。

ここからは行列は全て正方行列とする。物理学において正方行列でない行列が重要な意味を持つことは少ない。次元が同じ正方行列どうしならいつでも積が定義できる。ただし一般に非可換であり $AB = BA$ とは限らない。

全ての成分が 0 である行列

$$\mathbb{O} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (35.6)$$

を**零行列**という。零行列は数字の 0 と同じように $A + \mathbb{O} = A$, $A\mathbb{O} = \mathbb{O}A = \mathbb{O}$ が成り立つ。

正方行列の対角線上の成分 a_{11}, \dots, a_{NN} を対角成分といい, それ以外は非対角成分という。対角成分がすべて 1 で非対角成分が 0 の行列

$$I_N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (35.7)$$

を**単位行列** (identity matrix) という。単位行列は数字の 1 と同じように $AI_N = I_N A = A$ が成り立つ。

行列 A について $AX = I_N$ かつ $XA = I_N$ となるような行列 X が存在するとき A を**正則行列** (regular matrix) という。また X を A の**逆行列** (inverse matrix) といい $X = A^{-1}$ と表記する。明らかに逆行列 A^{-1} の逆行列は $(A^{-1})^{-1} = A$ である。2つの行列 A, B が正則ならば積 AB も正則である。実際 $X = B^{-1}A^{-1}$ に対して $XAB = I_N$ かつ $ABX = I_N$ となり $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ がわかる。

行列の計算において重要な役割をする正則行列を紹介する。1つ目は行列 (i, j) 成分 ($i \neq j$)

が $c (\neq 0)$ で他は単位行列と同じ行列,

$$P(i, j; c) := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (35.8)$$

この行列を任意の行列 A の左からかけると $P(i, j; c)A$ は A の j 行目を c 倍して i 行目に加えたものになる. 右からかけた場合は i 列目を c 倍して j 列目に加えたものになる. 逆行列は A の j 行目を $-c$ 倍して i 行目に加える行列 $P^{-1}(i, j; c) = P(i, j; -c)$ である.

2つ目は行列の (i, j) 成分 ($i \neq j$) と (j, i) 成分が 1 で (i, i) 成分と (j, j) 成分は 0 で他は単位行列と同じ行列

$$Q(i, j) := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (35.9)$$

この行列を任意の行列 A の左からかけると $Q(i, j)A$ は A の i 行目と j 行目を入れ替えたものになる. 右からかけた場合は i 列目と j 列目を入れ替えたものになる. もう一度入れ替えると元に戻るので逆行列は自分自身であり $Q^{-1}(i, j) = Q(i, j)$.

3つ目は (i, i) 成分が $c (\neq 0)$ で他は単位行列と同じ行列

$$R(i; c) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (35.10)$$

この行列を任意の行列 A の左からかけると $R(i; c)A$ は A の i 行目を c 倍したものになる. 右からかけた場合は i 列目を c 倍したものになる. 逆行列は i 行目を $1/c$ 倍する行列 $R^{-1}(i; c) = R(i; 1/c)$ である.

3つの行列 $P(i, j; c)$, $Q(i, j)$, $R(i; c)$ は**基本行列**といい, 基本行列による行列の変換を**基本変形**という. 行列 A に対して左から基本変形を繰り返して単位行列 $PA = I_N$ となったとしよう. ここで P は基本行列の積であり, それゆえ正則. このとき

$$A = I_N A = (P^{-1}P)A = P^{-1}I_N = P^{-1},$$

となり $AP = I_N$ も満たされる. したがって A は正則であり逆行列は $A^{-1} = P$ である. すべての行列に逆行列が存在するわけではない.

PROBLEM

PROBLEM1. 次の行列の積を計算せよ

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

SOLUTION.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

三角関数の加法定理により

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & \sin(\theta + \phi) \\ -\sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix}.$$

PROBLEM2. N 次正方行列 A, B に対して

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

を示せ.

SOLUTION. $(AB)^T$ の (i, j) 成分を c_{ij} とすると,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^N b_{ki} a_{jk},$$

ここで b_{ki} は B^T の (i, k) 成分であり, a_{jk} は A^T の (k, j) 成分である. したがって $(AB)^T = B^T A^T$ が示された.

PROBLEM3. 次の 3 次の正方行列に対して基本変形を施すことで逆行列を求めよ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION. 一般に逆行列を行基本変形で求めるときは次のようにすると便利である: $PA = I_N$ となる P を求めるために $N \times 2N$ 行列 $(A|I_N)$ を考えこれに左から基本行列をかけて $(I_N|P)$ と変形することを目指せば良い.

まず 1 行目の $1/2$ 倍を 2 行目に加える,

$$(A|I_3) \quad \mapsto \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

2 行目の $2/3$ 倍を 3 行目に加える,

$$(A|I_3) \quad \mapsto \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array} \right).$$

1行目を1/2倍, 2行目を2/3倍, 3行目を3/4倍する,

$$(A|I_3) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array} \right).$$

3行目の2/3倍を2行目に加える,

$$(A|I_3) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array} \right).$$

2行目の1/2倍を1行目に加える,

$$(A|I_3) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array} \right) = (I_3|P).$$

よって

$$P = A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

§36. 行列式

この節では行列からスカラーをつくる演算, 行列式を紹介する.

N 次正方行列 A の**行列式** (determinant) とは

$$\det A := \sum_{i_1, \dots, i_N} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{Ni_N}. \quad (36.1)$$

で定義されるスカラーである. ここで $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ は N 次元の Levi-Civita 記号であり

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} := \begin{cases} +1 & 123 \dots N \text{ の偶置換のとき} \\ -1 & 123 \dots N \text{ の奇置換のとき} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (36.2)$$

と定義される. ここで置換の説明を簡単にしておこう. N 個の数 $1, 2, 3, \dots, N$ を並べ替えて数列を得る操作を**置換** (permutation) という. 置換を σ とすると $i \neq j$ ならば $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ である. 特に2つの数字を入れ替えるだけの置換を**互換** (transposition) という. 任意の置換は互換を繰り返すことで実現でき, それは一意ではないが互換の回数の偶奇は置換に対し1つ決まる (証明は省く). 互換の数が偶数の場合は**偶置換** (even), 奇数の場合は**奇置換** (odd) という. たとえば $N=3$ のとき, $123, 231, 312$ は偶置換, $213, 132, 321$ は奇置換である.

記法として具体的な行列に対しては行列を $|$ で囲んで

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}, \quad (36.3)$$

と書く.

これを踏まえて $N = 3$ のときの行列式を具体的に書き出してみる.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

の行列式は

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \\ &= \epsilon_{123} a_{11} a_{22} a_{33} + \epsilon_{231} a_{12} a_{23} a_{31} + \epsilon_{312} a_{13} a_{21} a_{32} \\ &\quad + \epsilon_{132} a_{11} a_{23} a_{32} + \epsilon_{213} a_{12} a_{21} a_{33} + \epsilon_{321} a_{13} a_{22} a_{31}, \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \det A &= \\ & a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}. \end{aligned}$$

特に $N = 3$ のときはベクトルと関係付けられる. 3次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\mathbf{b} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $\mathbf{c} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ とおくと行列式は

$$\det A = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

とスカラー三重積で書ける. よって $N = 3$ の場合は3つのベクトルが張る平行六面体の体積に等しい.

基本変形と行列式の関係調べよう. 行列 A に対して j 行目を c 倍して i 行目に加えたもの $P(i, j; c)A$ の行列式は

$$\begin{aligned} \det P(i, j; c)A &= \sum_{k_1, \dots, k_N} \epsilon_{k_1 \dots k_N} a_{1k_1} \cdots (a_{ik_i} + ca_{jk_i}) \cdots a_{Nk_N} \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_N} \epsilon_{k_1 \dots k_N} a_{1k_1} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{Nk_N} \\ &\quad + c \sum_{k_1, \dots, k_N} \epsilon_{k_1 \dots k_N} a_{1k_1} \cdots a_{jk_i} \cdots a_{Nk_N}. \end{aligned}$$

ここで1行目は $\det A$ に等しい. 2行目については $\epsilon_{k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_N} a_{jk_i} a_{jk_j}$ に着目する. Levi-Civita 記号は k_i, k_j について反対称だが $a_{jk_i} a_{jk_j}$ は対称である. ゆえにこの和は相殺して0となる. したがって

$$\det P(i, j; c)A = \det A. \quad (36.4)$$

行列 A に対して i 行目と j 行目を入れ替えた ($i < j$ としても一般性を失わない) もの $Q(i, j)A$ の行列式は

$$\begin{aligned} \det Q(i, j)A &= \sum_{k_1, \dots, k_N} \epsilon_{k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_N} a_{1k_1} \cdots a_{jk_i} \cdots a_{ik_j} \cdots a_{Nk_N} \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_N} \epsilon_{k_1 \dots k_j \dots k_i \dots k_N} a_{1k_1} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{Nk_N}. \end{aligned}$$

ここで Levi-Civita 記号は添字を奇置換すると符号が反転するので $\epsilon_{k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_N} = -\epsilon_{k_1 \dots k_j \dots k_i \dots k_N}$ となる。したがって元の行列式の -1 倍に等しいことがわかる,

$$\det Q(i, j)A = -\det A. \quad (36.5)$$

最後に行列 A に対して i 行目を c 倍したもの $R(i; c)A$ の行列式は和の各項が c 倍されるだけなので

$$\det R(i; c)A = c \cdot \det A. \quad (36.6)$$

転置行列の行列式は元の行列の行列式と等しい,

$$\det A^T = \det A. \quad (36.7)$$

証明するにはまず定義より

$$\det A^T = \sum_{k_1, \dots, k_N} \epsilon_{k_1 \dots k_N} a_{k_1 1} \dots a_{k_N N},$$

すべての項で積 $a_{k_1 1} \dots a_{k_N N}$ を並べ替えて $a_{l_1 1} \dots a_{l_N N}$ にする。このとき Levi-Civita 記号 $\epsilon_{k_1 \dots k_N}$ と $\epsilon_{l_1 \dots l_N}$ は等しい。なぜならば $1, \dots, N$ を並べ替えて k_1, \dots, k_N を得るときの互換の回数と同じ回数で k_1, \dots, k_N から $1, \dots, N$ に戻せる。

$$\begin{aligned} 1, \dots, N &\Leftrightarrow k_1, \dots, k_N, \\ l_1, \dots, l_N &\Leftrightarrow 1, \dots, N. \end{aligned}$$

この戻す置換で $1, \dots, N$ は l_1, \dots, l_N が得られるので偶奇も等しい。よって各項で

$$\epsilon_{k_1 \dots k_N} a_{k_1 1} \dots a_{k_N N} = \epsilon_{l_1 \dots l_N} a_{l_1 1} \dots a_{l_N N},$$

が成立するので所期の結果を得る。

転置行列の行列式が等しいことによって、行に関して成立する性質は列に関しても成立することを意味する。たとえば上記で基本変形は行についてだけ見たが列についても同様である。

2つの行列 A, B の積の行列式については次が成立する,

$$\det AB = \det A \cdot \det B. \quad (36.8)$$

つまり行列の積を行列式では実数の積に置き換えられる。証明のためにまず積の定義より

$$\det AB = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N a_{1i} b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^N a_{1i} b_{iN} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N a_{Ni} b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^N a_{Ni} b_{iN} \end{vmatrix}.$$

1 列目に着目して行列式の線型性を使えば,

$$\det AB = \sum_{i_1=1}^N \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & \sum_{i=1}^N a_{1i} b_{iN} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{Ni_1} & \cdots & \sum_{i=1}^N a_{Ni} b_{iN} \end{vmatrix} \cdot b_{i_1 1},$$

として $b_{i_1 1}$ をくくり出せる. 他の列でも同様にして

$$\det AB = \sum_{i_1, \dots, i_N} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{Ni_1} & \cdots & a_{Ni_N} \end{vmatrix} \cdot b_{i_1 1} \cdots b_{i_N N},$$

和の各項で i_1, \dots, i_N を並び替えて a_{11}, \dots, a_{NN} となるようにすれば行列式の部分は $\det A$ に等しくなる. このとき行列式は互換の回数だけ -1 倍されるので $\epsilon_{i_1 \dots i_N}$ がかかる. よって

$$\det AB = \det A \cdot \sum_{i_1, \dots, i_N} \epsilon_{i_1 \dots i_N} b_{i_1 1} \cdots b_{i_N N},$$

となり所期の結果を得る.

A が正則行列のとき逆行列 A^{-1} が存在して $AA^{-1} = I_N$ である. $\det I_N = 1$ であり積の性質から

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}, \quad (36.9)$$

がわかる. よって A が正則ならば $\det A \neq 0$ でなければならない. この命題の逆については後述する.

直ちに計算が可能な行列として**三角行列** (triangular matrix) がある. N 次正方形で

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1N} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2N} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{NN} \end{pmatrix}, \quad (36.10)$$

という形の行列を上**三角行列**といい,

$$\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ t_{N1} & t_{N2} & t_{N3} & \cdots & t_{NN} \end{pmatrix}, \quad (36.11)$$

という形の行列を下**三角行列**という.

行列 T が三角行列ならば行列式は必ず対角成分の積に等しい:

$$\det T = t_{11} t_{22} \cdots t_{NN} = \prod_{i=1}^N t_{ii}. \quad (36.12)$$

上三角行列で示す (下三角行列は転置を取ればよい). 上三角では $i > j$ で $t_{ij} = 0$ なので, 行列式の和の内 で 0 でない項は $t_{1i_1} \cdots t_{Ni_N}$ の全てが $i \leq k_i$ でなければならない. これを満たせるのは $t_{11} \cdots t_{NN}$ のみである. 任意の行列式を計算したい場合は基本変形を施して三角行列の形まで変形できればその行列式が求められる.

N 次正方行列 A の行列式を 1 行目の成分の線形結合と見て

$$\det A = \sum_{k=1}^N a_{1k} \tilde{a}_{1k},$$

とおく. ここで係数は

$$\tilde{a}_{1k} = \sum_{i_2 \cdots i_N} \epsilon_{ki_2 \cdots i_N} a_{2i_2} \cdots a_{Ni_N},$$

である. \tilde{a}_{1k} は

$$\tilde{a}_{1k} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{Nk} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix},$$

という N 次行列の行列式と等しいことがわかる. まず $k=1$ に着目すると Levi-Civita 記号 $\epsilon_{i_2 \cdots i_N}$ は添字 1 は固定で残りの $2, \dots, N$ が実質的な添字 i_2, \dots, i_N の動く範囲なので 1 を落とした $\epsilon_{i_2 \cdots i_N}$ に等しい. よって

$$\tilde{a}_{11} = \sum_{i_2, \dots, i_N} \epsilon_{i_2 \cdots i_N} a_{2i_2} \cdots a_{Ni_N} =: \Delta_{11}.$$

ここで Δ_{11} は行列 A の 1 行目と 1 列目を取り除いた行列の行列式,

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N2} & \cdots & a_{Nk} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix},$$

であり, 行列の (1, 1) 余因子 (cofactor) という. 次に一般の k では k 列目を順々に入れ替えて 1 列目へ持ってくることで

$$\tilde{a}_{1k} = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2k} & a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{Nk} & a_{N1} & \cdots & a_{Nk-1} & a_{Nk+1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix},$$

となり $k=1$ と同様に行列 A の 1 行目と k 列目を取り除いた行列の行列式, (1, k) 余因子

$$\Delta_{1k} := (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} a_{2k} & a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{Nk} & a_{N1} & \cdots & a_{Nk-1} & a_{Nk+1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix},$$

が係数となる. よって

$$\det A = \sum_{k=1}^N a_{1k} \Delta_{1k},$$

と展開できる.

今は 1 行目について展開したが i 行目について展開した場合は

$$\det A = \sum_{k=1}^N a_{ik} \tilde{a}_{ik},$$

$$\tilde{a}_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{Nk} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}.$$

基本変形によって i 行目を順々に 1 行目へ入れ替えて、さらに k 列目を 1 列目へ順々に入れ替えれば $(1, 1)$ 成分に 1 を持ってこれる。よって行列式に $(-1)^{k+i-2}$ がかかる以外は同じ議論により

$$\det A = \sum_{k=1}^N a_{ik} \Delta_{ik}, \tag{36.13}$$

$$\Delta_{ik} := (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1} & \cdots & a_{i-1N} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1} & \cdots & a_{i+1N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{Nk-1} & a_{Nk+1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}, \tag{36.14}$$

と展開できることがわかる。 Δ_{ik} は行列 A の (i, k) 余因子という。

和 $\sum_k a_{ik} \Delta_{jk}$ を考える。 $i = j$ のときは上の結果から $\det A$ に等しい。 $i \neq j$ のときは i 行目と j 行目に同じものが現れる行列式に等しくなる、

$$\sum_k a_{ik} \Delta_{jk} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{iN} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jN} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}.$$

これは i 行目と j 行目の入れ替えで符号が変わることから 0 に等しいことがわかる。

以上の結果をまとめると

$$\sum_k a_{ik} \Delta_{jk} = \delta_{ij} \det A, \tag{36.15}$$

が成り立つ。さらに行と列を入れ替えても全く同様の式が成り立つ：

$$\sum_k a_{ki} \Delta_{kj} = \delta_{ij} \det A, \tag{36.16}$$

この2つを余因子展開という。

余因子を並べて転置をとった行列

$$\tilde{A} := (\Delta_{ij})^T \quad (36.17)$$

を定義すると余因子展開は

$$A\tilde{A} = \det A \cdot I_N, \quad \tilde{A}A = \det A \cdot I_N, \quad (36.18)$$

とかける。もし $\det A \neq 0$ ならば A の逆行列が

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}, \quad (36.19)$$

である。これにより次が示された：

$$\text{行列 } A \text{ が正則} \Leftrightarrow \det A \neq 0. \quad (36.20)$$

つまり行列式は行列が逆行列をもつかどうかの判定手段となる。

行列を使うと線型連立方程式を簡潔に書くことができる。 N 個の変数 x_1, \dots, x_N に関する N 個の方程式からなる連立方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2N}x_N &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{N1}x_1 + \cdots + a_{NN}x_N &= b_N, \end{aligned}$$

に対して、列ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ と $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$ と行列 $A = (a_{ij})$ を導入すれば

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (36.21)$$

と書ける。

A が正則ならば $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ と解くことができる。 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合の方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は重要である。この方程式は A が正則ならば自明な $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が解である。したがって自明でない解、すなわち x_1, \dots, x_N のうち少なくとも1つは0ではない解を持つためには $\det A = 0$ が必要条件である。

PROBLEM

PROBLEM1. 次の2次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

に対して逆行列を持つための実数 a, b, c, d の条件を調べ、余因子から逆行列を求めよ。

SOLUTION. 定義にしたがって余因子は

$$\Delta_{11} = d, \quad \Delta_{12} = -c, \quad \Delta_{21} = -b, \quad \Delta_{22} = a.$$

行列式は余因子展開より

$$\det A = \sum_k a_{1k} \Delta_{1k} = ad - bc,$$

よって逆行列を持つための条件は $ad - bc \neq 0$. 逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

PROBLEM2. 次の 3 次の正方行列の行列式を求めよ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

SOLUTION.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

まず 1 行目の $1/2$ 倍を 2 行目に加える,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

2 行目の $2/3$ 倍を 3 行目に加える,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{vmatrix}$$

上三角行列の形なので対角成分の積で与えられる,

$$\det A = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4.$$

PROBLEM3. **Cramer の公式**: N 個の変数 x_1, \dots, x_N に関する N 個の方程式からなる連立方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1N}x_N &= b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2N}x_N &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{N1}x_1 + \dots + a_{NN}x_N &= b_N, \end{aligned}$$

について, 係数行列 $A = (a_{ij})$ が正則ならば解が

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^N b_k \Delta_{ki},$$

で与えられることを示せ.

SOLUTION. 連立方程式は $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とかける. A は正則なので逆行列が存在し $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ と解ける. 逆行列は余因子 Δ_{ij} を用いて

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\Delta_{ij})^T,$$

と表せるので代入して整理すれば,

$$x_i = (A^{-1}\mathbf{b})_i = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^N \Delta_{ki} b_k.$$

§ 37. 実対称行列の固有値問題

この節では行列に関する固有値問題を議論する．固有値問題は物理において頻りに現れる問題で，量子力学においてはまさに基礎方程式が固有値問題である．ただし一般論は議論せずこの章で重要となる実対称行列に限定する．複素行列の固有値問題については量子力学の章で詳説する．

一般に N 次正方行列 A に関する固有値問題とは

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad (37.1)$$

を満たすスカラー λ と零ベクトルでないベクトル \mathbf{x} を求めることである．その λ の解を**固有値** (eigenvalue), \mathbf{x} の解を λ に属する**固有ベクトル** (eigenvector) という．

右辺に単位行列が作用しているとして $\lambda I_N \mathbf{x}$ とすれば,

$$(A - \lambda I_N)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (37.2)$$

と変形できる．この方程式で $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ であるための条件は行列 $A - \lambda I_N$ に逆行列が存在しないことである．よって

$$\det(A - \lambda I_N) = 0, \quad (37.3)$$

が成り立たなければならない．この λ に関する方程式を**固有方程式**という．固有方程式は一般に λ の N 次の多項式でありその根は代数学の基本定理よりたかだか N 個である．重根がある場合は物理では**縮退** (degeneracy) があるという．

固有方程式を解いて固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ を得たら，元の方程式 $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ を解いて固有ベクトル \mathbf{x} を定めることができる．

この節では実対称行列に限定する．**対称行列**とは転置をとっても不変であり， $A^T = A$ を満たす行列のことである．一方で転置して符号が反転する行列 $A^T = -A$ は**反対称行列**という．特に成分がすべて実数の対称行列を実対称行列という．

まず実対称行列の固有値は全て実数であることが示せる．固有値方程式 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ の両辺で複素共役をとると $A\mathbf{x}^* = \lambda^* \mathbf{x}^*$ が成り立つ．このときベクトル \mathbf{x}^* と $A\mathbf{x}$ の内積を取ると

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^*.$$

一方で対称行列であることから，

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}^* = (A\mathbf{x})^T \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}^* = \lambda^* \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^*.$$

2つを合わせると

$$(\lambda - \lambda^*)\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^* = 0,$$

となるが $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^* = \sum_i |x_i|^2 > 0$ なので $\lambda = \lambda^*$ でなければならない．

固有値が実数なので固有ベクトルも実ベクトルとして求まる．今は縮退はないとして N 個の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ は全て相異なるとする．2つの固有値 λ_i, λ_j とそれぞれに属する固有ベクトル $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ を考える．ベクトル \mathbf{x}_j と $A\mathbf{x}_i$ の内積を取ると

$$(A\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{x}_j = \lambda_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j.$$

一方で対称行列であることから,

$$(A\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{x}_j = (A\mathbf{x}_i)^T \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i^T A\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j.$$

2つを合わせると

$$(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0,$$

となるが $i \neq j$ なら $\lambda_i \neq \lambda_j$ なので $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0$ でなければならない. すなわち異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する. この直交性は縮退がある場合にも同様に成立する (証明略).

固有ベクトルはスカラー倍の不定性がある. そこで慣習的に固有ベクトルの大きさを 1 にとることが多い: $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 1$. この 2つを合わせると実対称行列の固有ベクトルを

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij},$$

を満たすように選べる.

固有ベクトルを列にもつ N 次正方行列 $U = (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_N)$ をつくる. この行列の転置 U^T との積をとると

$$\begin{aligned} U^T U &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^T \end{pmatrix} (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_N) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_N \cdot \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_N \cdot \mathbf{x}_N \end{pmatrix} \\ &= I_N. \end{aligned}$$

両辺の行列式を取ると $\det(U^T U) = (\det U)^2 = 1$ より $\det U \neq 0$ なので U は正則で逆行列 U^{-1} が存在する. $U^T U = I_N$ の右から U^{-1} をかけると $U^T = U^{-1}$ がわかる. $U^T = U^{-1}$ となる行列を一般に**直交行列** (orthogonal matrix) という.

さてこの直交行列 U を使って $U^T A U$ を計算すると,

$$\begin{aligned} U^T A U &= U^T A (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_N) \\ &= U^T (A\mathbf{x}_1 \ A\mathbf{x}_2 \ \cdots \ A\mathbf{x}_N) \\ &= U^T (\lambda_1 \mathbf{x}_1 \ \lambda_2 \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \lambda_N \mathbf{x}_N) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_N \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 \mathbf{x}_N \cdot \mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_N \mathbf{x}_N \cdot \mathbf{x}_N \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

となる. 固有ベクトルの直交性から結局

$$U^T A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}, \quad (37.4)$$

を得る。実対称行列 A の固有ベクトルからつくった直交行列 U を使って $U^{-1}AU$ は対角成分に固有値が並びそれ以外は 0 の行列を得ることができる。これを行列の**対角化**といい、実対称行列の場合は必ず直交行列によって対角化可能である。すべての行列が対角化可能ではないことに注意せよ。

成分が $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ の対角行列を記号で

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \quad (37.5)$$

と書くことがある。

対角化行列の行列式は

$$\det U^T A U = \lambda_1 \cdots \lambda_N,$$

である。直交行列の行列式の 2 乗は 1 に等しいから

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_N, \quad (37.6)$$

が成立する。

PROBLEM

PROBLEM1. 次の 3 次の実対称行列を固有値, 固有ベクトルを求めよ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

また A を対角化する直交行列 U を求めよ。

SOLUTION. まず固有値を求めるために固有値方程式 $\det(A - \lambda I_N) = 0$ を解く。

$$\det(A - \lambda I_N) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

1 行目についての余因子展開より

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_N) &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)[(2 - \lambda)^2 - 1] - (2 - \lambda) \\ &= -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) \end{aligned}$$

よって固有値は $\lambda = 2, 2 \pm \sqrt{2}$.

次にそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを求める。 $\lambda = 2$ のとき,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを解くと $y = 0, x = -z$. 大きさを 1 に課せば固有ベクトルは $\mathbf{x} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ と求まる。

同様にして $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ の場合も固有ベクトルを求めると

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

直交行列

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

は行列 A を対角化する.

§ 38. 振動のモード; 二体系

この節では振動の二体問題で扱ったバネで拘束された 2 質点の運動方程式を行列の知識を使って解く.

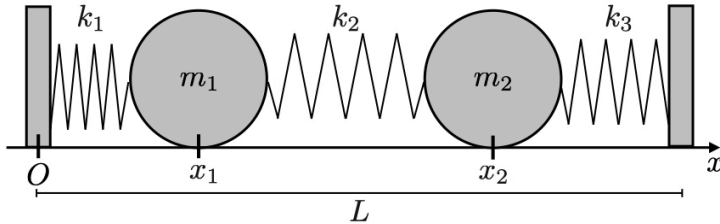


図 69 箱とバネで繋がれた 2 質点

箱の中に 2 つの質点 (質量 m_1, m_2) が 3 つのバネで繋がれている状況を考える. 3 つのバネのバネ定数を k_1, k_2, k_3 とする. 各質点がそれぞれ平衡点 (自然長の位置とは限らない) からのずれを x_1, x_2 としたときの運動方程式は,

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2, \end{aligned} \tag{38.1}$$

となる.

これら 2 つの方程式を 2 次元のベクトル表記を使って 1 つの方程式にまとめれば,

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)/m_1 & -k_2/m_1 \\ -k_2/m_2 & (k_2 + k_3)/m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{38.2}$$

とも書ける.

計算の簡単のために $k_1 = k_2 = k_3 =: k, m_1 = m_2$ とおく. すると,

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{38.3}$$

1 質点の単振動と同じように $\omega := \sqrt{k/m}$ とおき、右辺の行列を A と書く。ベクトル $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ の満たす方程式は、

$$\ddot{\mathbf{X}} = -\omega^2 A \mathbf{X}, \quad (38.4)$$

となる。行列 A は対称行列なので適当な直交行列 O ($O^T = O^{-1}$) が存在して $O^T A O$ を対角化行列にできる。したがって運動方程式の左からその O^T をかけて A と \mathbf{X} の間に $I_2 = O O^T$ を挟み込む。対角成分を λ_1, λ_2 とすると、

$$O^T \ddot{\mathbf{X}} = -\omega^2 O^T A O \cdot O^T \mathbf{X} = -\omega^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} O^T \mathbf{X}. \quad (38.5)$$

そして $\boldsymbol{\xi} = O^T \mathbf{X}$ とおけば方程式は

$$\ddot{\xi}_1 = -\omega^2 \lambda_1 \xi_1, \quad \ddot{\xi}_2 = -\omega^2 \lambda_2 \xi_2, \quad (38.6)$$

と分解することができる。これらは互いに独立であり、それぞれが振動数 $\omega_1 := \omega \sqrt{\lambda_1}$, $\omega_2 := \omega \sqrt{\lambda_2}$ の単振動になっている。それゆえ $\boldsymbol{\xi}$ の解は直ちに求めることができ、 $\mathbf{X} = O \boldsymbol{\xi}$ により x_1, x_2 も求めることができる。残る問題は対角成分 λ_1, λ_2 と行列 O を求めることである。

まず行列 A に関する固有値問題、

$$A \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}, \quad (38.7)$$

を立てる。2 × 2 の行列に対して固有値は 2 つ λ_1, λ_2 存在しそれぞれに固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ が対応する (ただし $\lambda_1 \neq \lambda_2$ を仮定)。線型代数学でよく知られた事実によれば、固有ベクトル \mathbf{u} を大きさ 1 になるように選んでそれらを並べてできる行列 $O := (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2)$ は直交行列であり A を対角化できる。そのときの対角成分は固有値 λ_1, λ_2 が並ぶ。固有ベクトル \mathbf{u} が零ベクトルでないための条件は、

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (38.8)$$

である (I_2 は 2 次の単位行列)。左辺の行列式は $(\lambda - 1)(\lambda - 3)$ に等しいので、固有値は $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ と求まる。

固有値 $\lambda_1 = 1$ に属する固有ベクトル $\mathbf{u}_1 = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)})$ を求めよう (\mathbf{u}_2 も同様)。連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

を解けば $u_1^{(1)} = u_2^{(1)} =: u$ とわかる。最後に $|\mathbf{u}_1| = 1$ より $u = 1/\sqrt{2}$ と定められる。よって固有ベクトルは $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2})(1, 1)$ 。

\mathbf{u}_2 も同様の手順で定めることができ、

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (38.9)$$

よって A を対角化する直交行列 O も

$$O = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad O^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (38.10)$$

と定まる.

こうして求めるべき量が定まったので \mathbf{X} を求められる. ξ_1, ξ_2 の一般解は

$$\begin{aligned}\xi_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1), \\ \xi_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2).\end{aligned}$$

ここで $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$. このように複雑な振動を分解して現れる単振動 ξ_i を **基準モード** (normal mode) または固有振動といい, その振動数 ω_i を基準振動数, または固有振動数という. それぞれのモードのに意味はすでに見た (§34).

次に $\mathbf{X} = O\xi$ により

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

から x_1, x_2 がわかって,

$$\begin{aligned}x_1 &= C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2), \\ x_2 &= C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2).\end{aligned}\tag{38.11}$$

ここで振幅を新たに定義し直した ($C_1 = A_1/\sqrt{2}$, $C_2 = A_2/\sqrt{2}$). x_1, x_2 は 2 つの基準モードの線型結合で表すことができた.

PROBLEM

PROBLEM1. 次の行列を固有値問題を解いて固有振動数を求めよ,

$$A = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)/m_1 & -k_2/m_1 \\ -k_2/m_2 & (k_2 + k_3)/m_2 \end{pmatrix}.$$

ただし $m_1, m_2, k_1, k_2, k_3 > 0$.

SOLUTION. 固有方程式 $\det(A - \lambda I_2)$ の解を用いて $\omega = \sqrt{\lambda}$ が固有振動数である. 行列式の計算から λ に関する二次方程式

$$\lambda^2 - \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{\mu} + \frac{k_3}{m_2} \right) \lambda + \frac{k_1 k_3 + (k_1 + k_3) k_2}{m_1 m_2} = 0,$$

が得られる. ここで $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ (換算質量). したがって解は

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 \alpha_i \pm \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3 - \beta \alpha_2)^2 + (1 - \beta^2) \alpha_2^2} \right],$$

と求まる. ここで

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{k_1}{m_1}, & \alpha_3 &= \frac{k_3}{m_2}, \\ \alpha_2 &= \frac{k_2}{\mu}, & \beta &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2},\end{aligned}$$

とおいた. 簡単な計算から $1 - \beta^2 > 0$ がわかるので λ は必ず相異なる実数で縮退はない.

まず行列 $A - \lambda_1 I_2$ に行基本変形を繰り返して,

$$\begin{pmatrix} I_p & \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix},\tag{38.12}$$

という形に変形する. ここで \mathbf{v}_1 は p 次元のベクトルで固有値がすべて異なる場合は p は行列 A の次元より 1 つ小さい²⁾. そして固有ベクトルは $\mathbf{u}_1 = C_1(\mathbf{v}_1, -1)^T$ で定められる. ただし C_1 は $|\mathbf{u}_1| = 1$ となるように選ぶ (よって $C_1 = (|\mathbf{v}_1|^2 + 1)^{-1/2}$). 今の場合

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

となるので $\mathbf{v}_1 = -1$ (1 次元のベクトルは普通の実数).

§39. 振動のモード; 多体系

前節では 2 個の質点がバネでつながれた系を考えた. このような系の振動は 2 つの基準振動に分解でき, 一般解は基準振動の線型結合で表すことができた. 今度は N 個の質点がバネにつながれた場合と同じような議論ができるかを考えてみよう.

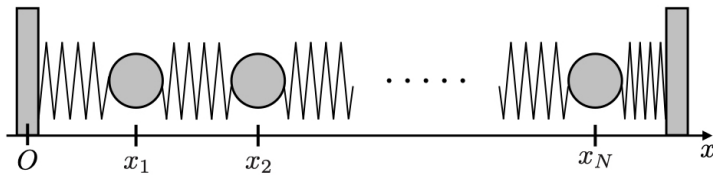


図 70 箱とバネで繋がれた N 質点

N 個の質点に左から順に $1, 2, 3, \dots, N$ とラベルをふる. 質量は共通で m とする. またすべてのバネは同じバネ定数 k とする. 質点が力学的平衡にあるときの位置からの変位を x_i (右向きを正とする) とし, 各質点にはたらく力を調べよう. まず質点 1 に着目すると左のバネから $-kx_1$ の力を受け, 右のバネからは $k(x_2 - x_1)$ の力を受ける. 質点 2 は左のバネから $-k(x_2 - x_1)$, 右のバネから $k(x_3 - x_2)$ の力をうける. よって質点 2 が受ける合力は $kx_1 - 2kx_2 + kx_3$ となる. 以下同様にして質点 $N - 1$ までの質点 i のうける力は $kx_{i-1} - 2kx_i + kx_{i+1}$ とわかる. 最後に質点 N は左のバネから $-k(x_N - x_{N-1})$ の力を受け, 右のバネから $-kx_N$ の力を受ける.

²⁾ 縮退がある場合は縮退の数 d だけ $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ が I_p の横に並び, ゆえに p は元の次元より d だけ小さくなる. そして

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_d \\ & & & -I_d \end{pmatrix},$$

の各列から固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ を定められる.

以上から N 個の運動方程式,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -2kx_1 + kx_2, \\ m\ddot{x}_2 &= kx_1 - 2kx_2 + kx_3, \\ &\vdots \\ m\ddot{x}_i &= kx_{i-1} - 2kx_i + kx_{i+1}, \\ &\vdots \\ m\ddot{x}_N &= kx_{N-1} - 2kx_N, \end{aligned} \tag{39.1}$$

が立てられる. これらを行列で書けば,

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}. \tag{39.2}$$

ここで $\omega = \sqrt{k/m}$ である. 右辺の行列を A , N 個の質点の変位を $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ とおく. すると上の方程式は,

$$\ddot{\mathbf{X}} = -\omega^2 \mathbf{A} \mathbf{X}, \tag{39.3}$$

と簡潔に書ける. A は実対称行列なので対角化可能で, 方程式の左から A を対角化させるような直交行列 O^T を作用させ, A と \mathbf{X} の間に $OO^T = I_N$ をはさむことで,

$$O^T \ddot{\mathbf{X}} = -\omega^2 (O^T \mathbf{A} O) \cdot O^T \mathbf{x}, \tag{39.4}$$

$$\Lambda := O^T \mathbf{A} O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix}, \tag{39.5}$$

と変形できる. $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ は A の固有値. 方程式はさらにあらたな変数 $\boldsymbol{\xi} = O^T \mathbf{X}$ を定義することでそれぞれの成分を独立に書くことができ,

$$\ddot{\xi}_i = -\omega^2 \lambda_i \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{39.6}$$

という方程式に帰着する. これは振動数 $\omega_i := \omega \sqrt{\lambda_i}$ の単振動を表す.

二体問題のときと同じように方程式 $\mathbf{A} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ を立てて, 固有値 λ とそれに属する固有ベクトル \mathbf{u} を求めて行列 O, Λ を定める. $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ の解を持つための条件は

$$\det(A - \lambda I_N) = 0, \tag{39.7}$$

(I_N は $N \times N$ の単位行列) である. 左辺の行列式を求めるためにまず $a_N := \det(A - \lambda I_N)$ とおくと余因子展開により,

$$a_N = (2 - \lambda)a_{N-1} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

さらに第2項で再び余因子展開をすれば

$$a_N = (2 - \lambda)a_{N-1} - a_{N-2},$$

という漸化式が得られる。この一般項は、

$$a_N = \frac{1}{\beta - \alpha} \left[\beta^{N-1}(a_2 - \alpha a_1) - \alpha^{N-1}(a_2 - \beta a_1) \right],$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)} \right], \quad \beta = \frac{1}{2} \left[2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)} \right],$$

と与えられる（問題参照）。ただし $\alpha \neq \beta$ 。 $a_1 = 2 - \lambda$, $a_2 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$ なので a_N は定まったことになる。

さらに固有値に考察を加える。 $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ の左から \mathbf{u}^T をかけると $\lambda = \mathbf{u}^T \mathbf{A}\mathbf{u}$ となる。ただし $|\mathbf{u}|^2 = 1$ とした。そこで N 変数関数 $R(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{A}\mathbf{u}$ を定義して条件 $|\mathbf{u}|^2 = 1$ の元での極値問題を考える。これは $\tilde{\lambda}$ を未定乗数として

$$F(\mathbf{u}, \lambda) = R(\mathbf{u}) + \tilde{\lambda}(1 - |\mathbf{u}|^2),$$

の極値問題と等価である（Lagrange の未定乗数法）。極値を取る条件は

$$0 = \frac{\partial F}{\partial u_i} = 2 \sum_{j=1}^N a_{ij} u_j - 2\tilde{\lambda} u_j,$$

であるが、これは固有値問題 $\mathbf{A}\mathbf{u} = \tilde{\lambda}\mathbf{u}$ と等価である。このことを事実として認めた場合、任意の N に対して

$$0 < \frac{2}{N} \leq R(\mathbf{u}) \leq 4 - \frac{2}{N} < 4,$$

がわかる（問題参照）ので、

$$0 < \lambda < 4, \tag{39.8}$$

も導ける。

このとき $-1 < 1 - \lambda/2 < 1$ なので

$$\cos \varphi := 1 - \frac{\lambda}{2},$$

とおける。よって

$$\alpha = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi},$$

$$\beta = \cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi},$$

となり、 $a_1 = \cos \varphi$, $a_2 = 4 \cos^2 \varphi - 1$ 。以上をまとめて a_N を φ で書き換えて加法定理を駆使して整理すれば

$$\det(A - \lambda I_N) = a_N = \frac{\sin[(N+1)\varphi]}{\sin \varphi}, \tag{39.9}$$

となる。

固有方程式は

$$\frac{\sin[(N+1)\varphi]}{\sin\varphi} = 0,$$

となるので, $\sin\varphi \neq 0$ から $\varphi \neq 0, \pi$ かつ $\sin[(N+1)\varphi] = 0$ から

$$\varphi = \frac{\pi n}{N+1} =: \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (39.10)$$

$\lambda = 2(1 - \cos\varphi)$ なので

$$\lambda_n = 2 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi n}{N+1} \right) \right] = 4 \sin^2 \left[\frac{\pi n}{2(N+1)} \right], \quad (39.11)$$

が N 個の固有値である.

次に固有ベクトルを求めよう. λ_n に属する固有ベクトルを $\mathbf{u}_n = (u_1^{(n)}, \dots, u_N^{(n)})$ として連立方程式

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda_n & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 - \lambda_n & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda_n & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 - \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \\ \vdots \\ u_N^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

を解く. 各成分で計算すると,

$$\begin{aligned} u_2^{(n)} &= (2 - \lambda_n)u_1^{(n)}, \\ u_i^{(n)} &= (2 - \lambda_n)u_{i-1}^{(n)} - u_{i-2}^{(n)}, \quad (3 \leq i \leq N-1), \\ 0 &= (2 - \lambda_n)u_N^{(n)} - u_{N-1}^{(n)}. \end{aligned}$$

$u_1^{(n)} =: v$ とおくと $u_2^{(n)} = (2 - \lambda_n)v$, $u_3^{(n)} = (\lambda_n^2 - 4\lambda_n + 3)v$ となり一般項 $u_i^{(n)}$ は行列式 a_{i-1} の v 倍に等しい. よって

$$u_i^{(n)} = v \cdot \frac{\sin(i\varphi_n)}{\sin\varphi_n}, \quad \varphi_n = \frac{\pi n}{N+1},$$

となる. $|\mathbf{u}_n|^2 = 1$ の条件から v を定めることができ

$$u_i^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \cdot \sin(i\varphi_n), \quad (39.12)$$

として固有ベクトルが求まった.

直交行列を $O = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ でつくと行列 A を対角化できる. O の (i, n) 成分は $u_i^{(n)}$ である. $\boldsymbol{\xi} = O^T \mathbf{X}$ を定義して運動方程式は N 個の独立な方程式 $\ddot{\xi}_n = -\omega_n^2 \xi_n$ に還元される. ここで

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin \left[\frac{\pi n}{2(N+1)} \right]. \quad (39.13)$$

一般解は $\xi_n = A_n \cos(\omega_n t + \delta_n)$ で与えられる. A_n, δ_n は初期条件から与えられる定数. 元の座標に戻すには $x_i = \sum_n O_{in} \xi_n$ を計算する必要がある. ここまでの結果を代入すれば

$$x_i = \sum_{n=1}^N C_n \sin(i\varphi_n) \cos(\omega_n t + \delta_n), \quad (39.14)$$

$$\varphi_n = \frac{\pi n}{N+1}, \quad \omega_n = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \quad (39.15)$$

が得られる ($C_n = A_n \sqrt{2/(N+1)}$). よって一般解は各基準モードの線型結合で表される (重ね合わせの原理).

$N=2$ のときは二体問題の結果と一致することが容易に確かめられる. $N=3$ のときは固有値は $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$ であり, それぞれに属する固有ベクトルは

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

PROBLEM

PROBLEM1. 次の漸化式の一般項を求めよ:

$$a_N = (2 - \lambda)a_{N-1} - a_{N-2}.$$

SOLUTION. まず一般項を得るために

$$\begin{aligned} (a_N - \alpha a_{N-1}) &= \beta(a_{N-1} - \alpha a_{N-2}), \\ (a_N - \beta a_{N-1}) &= \alpha(a_{N-1} - \beta a_{N-2}), \end{aligned}$$

という形に変形する. 元の漸化式と比較すれば $\alpha + \beta = 2 - \lambda$ かつ $\alpha\beta = 1$ を満たさなければならないことがわかる. すなわち α, β は二次方程式 $x^2 - (2 - \lambda)x + 1 = 0$ の解. ゆえに,

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)} \right], \quad \beta = \frac{1}{2} \left[2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)} \right].$$

$a_N - \alpha a_{N-1}$ という数列は公比 β の等比数列なので一般項は $a_N - \alpha a_{N-1} = \beta^{N-2}(a_2 - \alpha a_1)$. 同様に $a_N - \beta a_{N-1} = \alpha^{N-2}(a_2 - \beta a_1)$ を得る. この2つの結果から a_{N-1} を消去すれば

$$(\beta - \alpha)a_N = \beta^{N-1}(a_2 - \alpha a_1) - \alpha^{N-1}(a_2 - \beta a_1).$$

$\alpha \neq \beta$ なら $\{a_N\}$ の一般項が求まる.

$\alpha = \beta$ の場合, $a_N - \alpha a_{N-1} = \alpha(a_{N-1} - \alpha a_{N-2})$ と変形できる. これは公比 α の等比数列なので $a_N - \alpha a_{N-1} = \alpha^{N-2}(a_2 - \alpha a_1)$. 両辺を α^{N-2} で割って $b_N := a_N/\alpha^{N-2}$ とおくと $b_N = b_{N-1} + (a_2 - \alpha a_1)$ となる. これは公差 $a_2 - \alpha a_1$ の等差数列なので $b_N = (N-2)(a_2 - \alpha a_1) + b_2$ と一般項が求まる. ゆえに

$$a_N = (N-1)a_2\alpha^{N-2} - (N-2)a_1\alpha^{N-1}.$$

PROBLEM2. N 変数 \mathbf{u} に関する二次形式 $R(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}$ について条件 $|\mathbf{u}|^2 = 1$ の下では次の不等式が成り立つことを示せ:

$$\frac{2}{N} \leq R(\mathbf{u}) \leq 4 - \frac{2}{N},$$

ただし A は本文で与えられる行列.

SOLUTION. A を具体的に計算すると,

$$\begin{aligned} R(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}^T A \mathbf{u} \\ &= 2u_1^2 - 2u_1u_2 + 2u_2^2 - 2u_2u_3 + 2u_3^2 + \cdots + 2u_{N-1}u_N + 2u_N^2, \end{aligned}$$

となる. $|\mathbf{u}|^2 = 1$ を課せば

$$\begin{aligned} R(\mathbf{u}) &= 2 - 2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \\ &= 2 - 2\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{N-1}^2)(u_2^2 + u_3^2 + \cdots + u_N^2)} \cos \theta, \end{aligned}$$

と変形できる. 後ろの内積は $N - 1$ 次元のベクトルであり, θ はそれらのベクトルがなす角. もう一度 $|\mathbf{u}|^2 = 1$ を用いれば

$$R(\mathbf{u}) = 2 - 2\sqrt{(1 - u_N^2)(1 - u_1^2)} \cos \theta.$$

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$ だから

$$2 - 2\sqrt{(1 - u_N^2)(1 - u_1^2)} \Big|_{\cos \theta = 1} \leq R(\mathbf{u}) \leq 2 + 2\sqrt{(1 - u_N^2)(1 - u_1^2)} \Big|_{\cos \theta = -1}.$$

さらに相加・相乗平均の関係から

$$(u_1^2 + u_N^2) \Big|_{\cos \theta = 1} \leq R(\mathbf{u}) \leq (4 - u_1^2 - u_N^2) \Big|_{\cos \theta = -1},$$

を得る. 等号成立は $u_1^2 = u_N^2$ のときである.

まず $\cos \theta = 1$ の場合を考える. このとき 2 つのベクトルは平行で $c > 0$ を用いて $(u_1, u_2, \dots, u_{N-1}) = c(u_2, u_3, \dots, u_N)$ とおける. それゆえ $u_1 = cu_2 = c^2u_3 = \cdots = c^{N-1}u_N$ となる. $u_1^2 = u_N^2$ と合わせて $c = 1$ であり, $1 = |\mathbf{u}|^2$ より $u_1 = u_2 = \cdots = u_N = 1/\sqrt{N}$ がわかる. このとき $R(\mathbf{u})$ は最小値 $2/N$ がわかる.

同様に $\cos \theta = -1$ の場合は 2 つのベクトルは反平行で $d > 0$ を用いて $(u_1, u_2, \dots, u_{N-1}) = -d(u_2, u_3, \dots, u_N)$ とおける. それゆえ $u_1 = -du_2 = (-d)^2u_3 = \cdots = (-d)^{N-1}u_N$ となる. $u_1^2 = u_N^2$ と合わせて $d = 1$ であり, $1 = |\mathbf{u}|^2$ より $u_1 = -u_2 = \cdots = (-1)^{N-1}u_N = 1/\sqrt{N}$ がわかる. このとき $R(\mathbf{u})$ は最大値 $4 - 2/N$ がわかる.

以上を合わせると所期の結果を得る.

§ 40. 振動のモード; 周期的境界条件

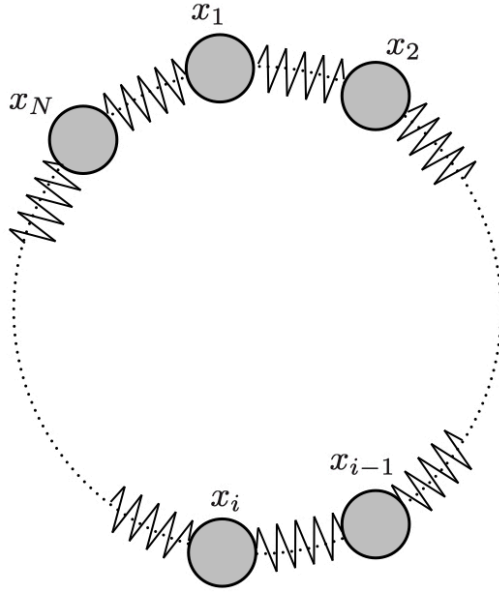
この節ではリング内に N 個の質点がバネでつながれている状況を考える. このとき質点の変位は

$$x_{j+N} = x_j, \tag{40.1}$$

という周期性を持つ. これを**周期的境界条件** (periodic boundary condition) という.

リングに束縛されていることは忘れて質点 1 つ 1 つは 1 次元の直線上を運動しているとみなそう. 箱に束縛されているときと異なるのは端の質点 x_1, x_N も他と全く同じ運動方程式に従うことであり, 全ての $1 \leq k \leq N$ に対して,

$$m\ddot{x}_k = kx_{k-1} - 2kx_k + kx_{k+1}, \tag{40.2}$$

図 71 リング状にバネで繋がれた N 質点

を満たす。ただし $x_0 = x_N, x_{N+1} = x_1$. 行列表記では

$$\ddot{\mathbf{X}} = -\omega^2 \mathbf{A} \mathbf{X}, \quad (40.3)$$

ここで $\omega = \sqrt{k/m}$, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ であり,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (40.4)$$

A を対角化する正則行列をみつければ N 個の方程式を独立に解くことができる。実対称行列は直交行列で対角化が可能だがここでは少し違う方法で対角化する。まず行列 A を次のように分解する：

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{I}_N - \mathbf{B} - \mathbf{B}^{-1}. \quad (40.5)$$

ここで

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (40.6)$$

行列 B を対角化する正則行列 P が見つかって $P^{-1}BP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ とする。このとき $(P^{-1}BP)^{-1} = P^{-1}B^{-1}P = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_N^{-1})$ となって B^{-1} も同時に対角化される。

したがって

$$P^{-1}AP = \text{diag} \left(2 - \lambda_1 - \lambda_1^{-1}, \dots, 2 - \lambda_N - \lambda_N^{-1} \right), \quad (40.7)$$

として A も対角化される.

では B の固有値を求めよう. 固有方程式 $\det(B - \lambda I_N) = 0$ は余因子展開からすぐに

$$\lambda^N = 1, \quad (40.8)$$

と等価とわかる. よって λ は 1 の冪根であり,

$$\lambda = e^{i\frac{2\pi n}{N}} =: \lambda_n, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (40.9)$$

となって B の固有値が得られた. A の固有値は

$$2 - \lambda_n - \lambda_n^{-1} = 2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi n}{N} \right), \quad (40.10)$$

である. 固有値は正弦函数の対称性から λ_n と λ_{N-n} 一致しており, 縮退している.

次に固有ベクトルを求めよう. λ_n に属する固有ベクトルを $\mathbf{u}_n = (u_1^{(n)}, \dots, u_N^{(n)})$ として連立方程式

$$\begin{pmatrix} -\lambda_n & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_n & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{(n)} \\ u_N^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

を解く. 各成分で計算すると,

$$\lambda_n u_k^{(n)} = u_{k+1}^{(n)}, \quad (1 \leq k \leq N).$$

$u_1^{(n)} =: v$ とおくと $u_k^{(n)} = \lambda_n^{k-1} v$ となる. $|\mathbf{u}_n|^2 = 1$ の条件から v を定めることができ, $v = 1/\sqrt{N}$. よって

$$u_k^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_n^{k-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi n(k-1)}{N}}, \quad (40.11)$$

として固有ベクトルが求まった. 2つの固有ベクトルの内積は $m \neq n$ ならば

$$\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^N u_k^{*(n)} u_k^{(m)} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i(m-n)N}}{1 - e^{i\frac{2\pi(m-n)}{N}}} = 0,$$

となり直交関係 $\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_m = \delta_{nm}$ を満たす. したがって正則行列を $P = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ でつくと行列 A を対角化できることもわかる. P の (k, n) 成分は $u_k^{(n)}$ であり,

$$P = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (40.12)$$

直交関係から P の逆行列は

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1^* & \cdots & \lambda_1^{*N-1} \\ 1 & \lambda_2^* & \cdots & \lambda_2^{*N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N^* & \cdots & \lambda_N^{*N-1} \end{pmatrix} = P^\dagger.$$

よって P はユニタリ行列である。

$\xi = P^{-1}X$ を定義して運動方程式は N 個の独立な方程式 $\ddot{\xi}_n = -\omega_n^2 \xi_n$ に還元される。ここで

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right). \quad (40.13)$$

一般解は $\xi_n = A_n \cos(\omega_n t + \delta_n)$ で与えられる。 A_n, δ_n は初期条件から与えられる定数でいま A_n は複素数。元の座標に戻すには $x_k = \sum_n u_k^{(n)} \xi_n$ を計算する必要がある。ここまでの結果を代入すれば

$$x_k = \sum_{n=1}^N C_n e^{i\frac{2\pi n(k-1)}{N}} \cos(\omega_n t + \delta_n), \quad (40.14)$$

が得られる ($C_n = A_n/\sqrt{N}$)。よって一般解は各基準モードの線型結合で表される。また周期的境界条件も満たしている。ただし x_k は明らかに実数なので

$$x_k = \sum_{n=1}^N \operatorname{Re} \left(C_n e^{i\frac{2\pi n(k-1)}{N}} \right) \cos(\omega_n t + \delta_n), \quad (40.15)$$

と書いてもよい。

§ 41. 強制振動*

減衰振動の設定でさらに外力が加わる場合を考えよう。外力の存在によって抵抗があっても静止せずに振動を続けることができる。これはたとえば空気抵抗のある中でブランコを漕ぐときのペダルの運動がこれに当てはまる。

外力を時間の関数として $F(t)$ とした場合、この物体の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha \frac{dx}{dt} - kx + F.$$

あるいはこれを変形して、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m}.$$

再び $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\gamma = \alpha/m$ を定義して方程式を見やすくしておく。微分も演算子とみて、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x(t) = \frac{F}{m}. \quad (41.1)$$

右辺にあるような x とは関係ない函数の項 (非斉次項) を含む微分方程式を非斉次の方程式という. 方程式 (41.1) の 2 つの異なる解を $x_1(t), x_2(t)$ としよう. するとこれらは,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x_1(t) &= \frac{F}{m}, \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x_2(t) &= \frac{F}{m}, \end{aligned}$$

を満たす. 片々引き算をすれば右辺を消去できて,

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) (x_1(t) - x_2(t)) = 0,$$

となる. $x_1 - x_2$ をひとつの函数と見ればこれは前節の減衰振動の方程式と一致している. したがって一般解は,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t}, \\ \lambda_{\pm} &= -\frac{\gamma}{2} \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}, \end{aligned}$$

とかける. もし強制振動の方程式を満たす解がひとつでも見つかったならば, それを $x_2(t)$ として方程式 (41.1) の一般解 $x_1(t)$ は次のように書ける:

$$x_1(t) = x_2(t) + c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t}.$$

一般に線型微分方程式は

$$x(t) = (\text{非斉次方程式の特解}) + (\text{非斉次項} = 0 \text{ の方程式の一般解}),$$

という形で一般解を求めることができる. 微分方程式の特解とは何でも良いから方程式を満たす一つの具体的な解のことである. いま非斉次項を 0 とおいたときの一般解は減衰振動であり求まっているのであとは特解を具体的に与えれば良い.

特解を求めるに際して次のような変換を考える:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{x}(\omega) e^{-i\omega t}, \\ \tilde{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x(t) e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{41.2}$$

これを $x(t)$ の **Fourier 変換** という. この式を (41.1) に代入すると,

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{x}(\omega) e^{-i\omega t} = \frac{F}{m}.$$

時間 t と積分変数 ω は独立だから時間微分と積分は交換しても良い. 時間微分は後ろの指数函数にだけ作用して,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2 \right) \tilde{x}(\omega) e^{-i\omega t} = \frac{F}{m}.$$

外力 F についても Fourier 変換により,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{F}(\omega) e^{-i\omega t},$$

とかける. そうすると積分函数を比較できて,

$$\left(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2\right)\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{m}.$$

したがって,

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{m(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2)}.$$

式 (41.2) に戻せば特解が,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\tilde{F}(\omega)}{m(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2)} e^{-i\omega t}.$$

さらに $\tilde{F}(\omega)$ は,

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(t) e^{i\omega t},$$

と変換するから,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{F(t')}{m(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2)} e^{-i\omega(t-t')}.$$

ここで代入した式の積分変数は t' として x の引数 t と区別しなければならないことに注意する. ω による積分に注目しよう. いま ω と時間 t' は独立な変数だから積分の順序はどちらが先でも良い. すると ω に関する部分だけを抜き出して書くと,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2},$$

が実行できる. 積分変数 ω を複素数に拡張して, 指数函数を除いた被積分函数を,

$$f(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2},$$

と定義しよう. この函数は $\omega = -i\gamma/2 \pm \sqrt{-(\gamma/2)^2 + \omega_0^2} = \lambda_{\pm}$ において発散する. この2つの発散する点 (極) は判別式 $D = 4\omega_0^2 - \gamma^2$ が負のとき2つの純虚数となり正のときは虚部が等しく実部の符号が反対の複素数となる. $D = 0$ のときは極は1つに重なるが, いまは質点の振動に興味があるので $D > 0$ の場合を考察していこう.

上の積分の値をもとめるために Jordan の補助定理について説明する. 一般に次のような複素積分を考える:

$$\int_{C_+(0;R)} f(z) e^{ikz}, \quad k > 0.$$

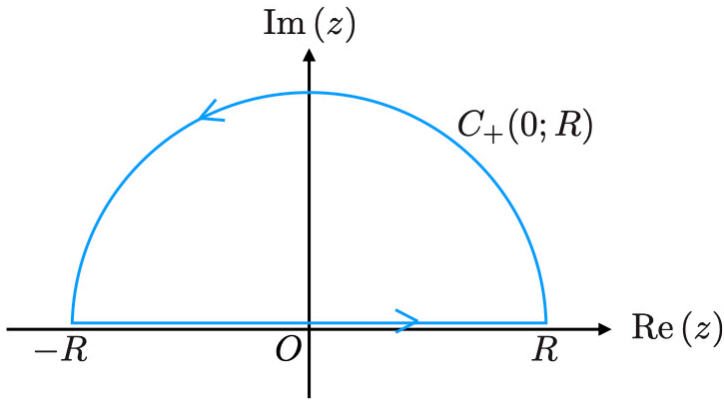


図 72 半径無限の半円の積分経路

ここで $C_+(0; R)$ は中心原点, 半径 R の上半面の半円である. 函数 $f(z)$ が, 十分大きな a をとれば領域

$$D = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid r \geq a, 0 \leq \theta \leq \pi \right\},$$

で連続でありかつ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |f(Re^{i\theta})| = 0,$$

をみたすとき,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_+(0; R)} f(z)e^{ikz} = 0,$$

となる. これを **Jordan の補助定理** という. $k < 0$ のときには $C_+(0; R)$ を下半面の半円 $C_-(0; R)$ に替えれば同じことが成り立つ. Jordan の補助定理から積分経路を $-R$ から R へ実軸上をいってそのあと $C_+(0; R)$ を通って $-R$ へ戻る径路にとれば,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint dz f(z)e^{ikz} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{C_+(0; R)} f(z)e^{ikz} + \int_{-R}^R dz f(z)e^{ikz} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)e^{ikx}, \end{aligned}$$

となる. ただし x は z の実部である.

では $f(\omega)e^{-i\omega(t-t')}$ の積分に戻ろう. 極より外側では被積分函数は連続であることは明らかである. また $\omega = Re^{i\theta}$ とおけば,

$$\frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2} = \frac{1}{-R^2 e^{2i\theta} - i\gamma R e^{i\theta} + \omega_0^2}.$$

よって $R \rightarrow \infty$ の極限この函数の絶対値は θ によらず 0 に向かう. 以上から $f(\omega)$ に対して Jordan の補助定理が使えることが示せた. ゆえに $t - t' > 0$ のとき, 積分路は下半面で閉じて,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int d\omega f(\omega)e^{-i\omega(t-t')} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega)e^{-i\omega(t-t')}.$$

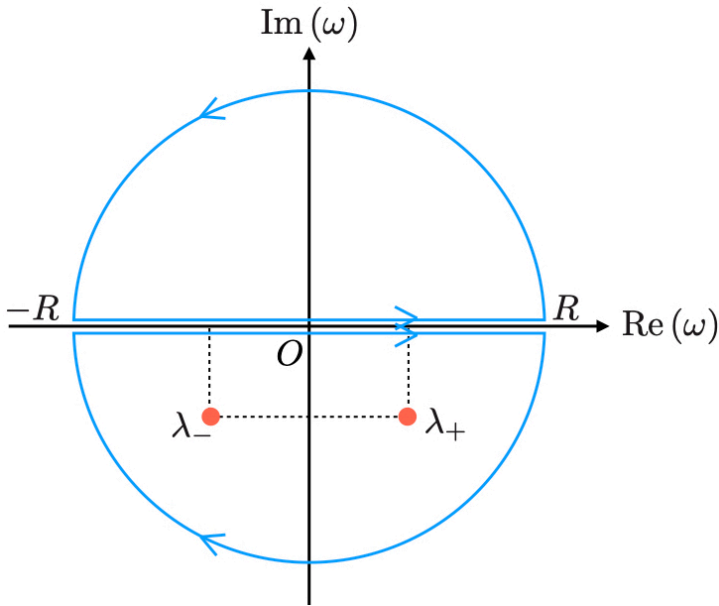


図 73 $t-t' < 0$ のとき積分経路は上半面で閉じて内部に極は存在しない. 他方 $t-t' > 0$ のときは下半面で閉じて 2 つの極 $\omega = \lambda_{\pm}$ が存在する.

一方, 下半面の極は 2 つありその極を λ_{\pm} とおけば留数定理から $t-t' > 0$ のとき,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int d\omega f(\omega) e^{-i\omega(t-t')} = 2\pi i \sum_{\{\lambda_{\pm}\}} \text{Res}(f e^{-i\omega(t-t')}, \lambda_{\pm}),$$

となる. 極は 1 位だから留数を計算すると,

$$\begin{aligned} \text{Res}(f e^{i\omega(t-t')}, \lambda_{\pm}) &= \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\frac{d}{d\omega}(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2)} \Big|_{\omega=\lambda_{\pm}} \\ &= \frac{\mp e^{-i\lambda_{\pm}(t-t')}}{\sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}}. \end{aligned}$$

$t-t' < 0$ のときには上半面で積分路は閉じるがこちら側に極が存在しないので Cauchy の積分定理より積分値は 0 に等しい. 結局,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) e^{i\omega(t-t')} = \frac{4\pi e^{-\gamma(t-t')/2}}{\sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}} \vartheta(t-t') \sin \left[\sqrt{-\gamma^2/4 + \omega_0^2} (t-t') \right]. \quad (41.3)$$

ここで $\vartheta(x)$ は Heaviside の階段函数 (step function) である³⁾.

³⁾ 階段函数の定義は

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

であり, $\frac{d}{dx} \vartheta(x) = \delta(x)$ という性質を持つ. いまの場合は $t-t'$ の正負に応じて積分が値をもつかどうかということを表現している.

これで ω 積分が求まったので強制振動の特解は,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{F(t')}{m} \frac{2e^{-\gamma(t-t')/2}}{\sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}} \vartheta(t-t') \sin \left[\sqrt{-\gamma^2/4 + \omega_0^2}(t-t') \right], \quad (41.4)$$

で与えられる. 階段函数のために $t-t'$ が負のところではか値を持たないから,

$$x(t) = \int_{-\infty}^t dt' \frac{F(t')}{m} \frac{2e^{-\gamma(t-t')/2}}{\sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}} \sin \left[\sqrt{-\gamma^2/4 + \omega_0^2}(t-t') \right], \quad (41.5)$$

と積分範囲を書いても良い. 一般解は,

$$x(t) = c_1 e^{\lambda+t} + c_2 e^{\lambda-t} + \int_{-\infty}^t dt' \frac{F(t')}{m} \frac{2e^{-\gamma(t-t')/2}}{\sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}} \sin \left[\sqrt{-\gamma^2/4 + \omega_0^2}(t-t') \right], \quad (41.6)$$

となる. この解の性質については次節で述べることにする.

ここで述べた特解を見つける方法は Green 函数の方法と呼ばれる一般的手法に拡張できる. Green 函数については電磁気学の章で詳しく述べる. また外力項 $F(t)$ を確率変数に置き換えたものは Brown 運動をはじめとした非平衡系を記述する確率微分方程式 (Langevin 方程式) として重要である.

§ 42. 共鳴現象*

前節の強制振動の結果において外力 $F(t)$ の形が周期的な函数を仮定しよう. たとえばそのようなものとして, $F(t) = f \cos \Omega t$ を考える. このとき特解は (41.5) より,

$$x(t) = \frac{f}{m\sqrt{D}} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\gamma(t-t')/2} \cos \Omega t' \sin \left[\sqrt{D}(t-t') \right]. \quad (42.1)$$

ただし $D = -\gamma^2/4 + \omega_0^2$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\gamma = \alpha/m$ である.

三角函数の部分は和と積の関係から,

$$2 \cos \Omega t' \sin \left[\sqrt{D}(t-t') \right] = \sin \left[\Omega t' + \sqrt{D}(t-t') \right] - \sin \left[\Omega t' - \sqrt{D}(t-t') \right],$$

となる. 次に積分部分だけを抜き出して $x(t) = f(I_+ - I_-)/(2m\sqrt{D})$ とおく. 部分積分の公

式を2回続けて適用すると,

$$\begin{aligned}
 I_{\pm} &= \int_{-\infty}^t dt' e^{-\gamma(t-t')/2} \sin \left[\Omega t' \pm \sqrt{D}(t-t') \right] \\
 &= \left[\frac{2e^{-\gamma(t-t')/2}}{\gamma} \sin \left[\Omega t' \pm \sqrt{D}(t-t') \right] \right]_{-\infty}^t \\
 &\quad - \frac{2(\Omega \mp \sqrt{D})}{\gamma} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\gamma(t-t')} \cos \left[\Omega t' \pm \sqrt{D}(t-t') \right] \\
 &= \frac{2 \sin \Omega t}{\gamma} - \frac{2(\Omega \mp \sqrt{D})}{\gamma} \left[\frac{2e^{-\gamma(t-t')}}{\gamma} \cos \left[\Omega t' \pm \sqrt{D}(t-t') \right] \right]_{-\infty}^t \\
 &\quad - \left(\frac{\Omega \mp \sqrt{D}}{\gamma/2} \right)^2 I_{\pm}.
 \end{aligned}$$

この結果から,

$$\left[1 + \left(\frac{\Omega \mp \sqrt{D}}{\gamma/2} \right)^2 \right] I_{\pm} = \frac{4}{\gamma^2} \left[\frac{\gamma}{2} \sin \Omega t - (\Omega \mp \sqrt{D}) \cos \Omega t \right].$$

D の定義を代入して整理すれば,

$$I_{\pm} = \frac{1}{\Omega^2 + \omega_0^2 \mp 2\sqrt{D}\Omega} \left[\frac{\gamma}{2} \sin \Omega t - (\Omega \mp \sqrt{D}) \cos \Omega t \right].$$

この結果を $x(t)$ の式に代入して $I_+ - I_-$ を計算する. 各係数について,

$$\frac{1}{\Omega^2 + \omega_0^2 - 2\sqrt{D}\Omega} \pm \frac{1}{\Omega^2 + \omega_0^2 + 2\sqrt{D}\Omega},$$

を計算すると, それぞれの符号で,

$$(+) \frac{2(\Omega^2 + \omega_0^2)}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}, \quad (-) \frac{4\sqrt{D}\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2},$$

となる. 以上をまとめると, 周期的外力のもとでの (42.1) の積分結果は,

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{f}{2m\sqrt{D}} \left[\frac{4\sqrt{D}\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} \left(\frac{\gamma}{2} \sin \Omega t - \Omega \cos \Omega t \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2(\Omega^2 + \omega_0^2)}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} \cdot \sqrt{D} \cos \Omega t \right] \\
 &= \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} \left[\gamma \Omega \sin \Omega t - (\Omega^2 - \omega_0^2) \cos \Omega t \right].
 \end{aligned} \tag{42.2}$$

三角関数の合成をすれば,

$$x(t) = \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}} \cos(\Omega t - \delta) \tag{42.3}$$

ここで,

$$\tan \delta = -\frac{\gamma \Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad (42.4)$$

これが周期的な外力 $F(t) = f \cos \Omega t$ による強制振動の特解である.

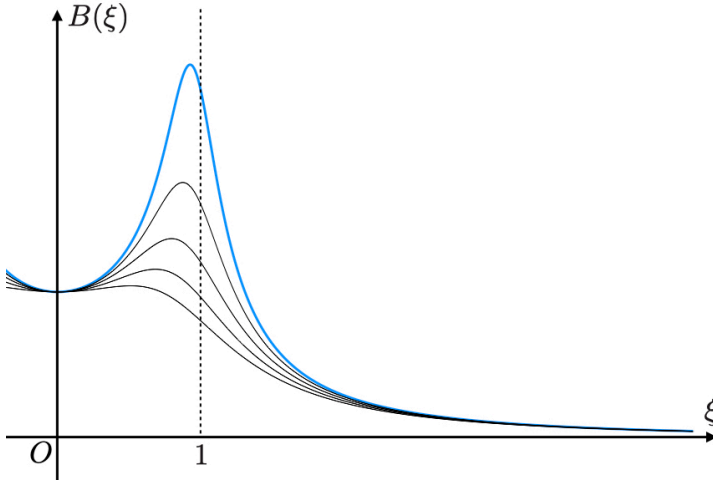


図 74 強制振動の振幅. 減衰率 α が小さいほどピークが鋭くなっていく. またピーク位置が $\xi = 1$ に漸近する.

この解のふるまいを調べてみよう. 振動の振幅は,

$$A(\Omega) = \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma \Omega)^2}}, \quad (42.5)$$

である. これを無次元の量で表すために $\xi = \Omega/\omega_0$ という変数でかきかえると,

$$A(\Omega) = \frac{f}{m\omega_0^2} B(\xi), \quad B(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(\xi^2 - 1)^2 + a^2 \xi^2}}.$$

ここで $a = \gamma/\omega_0 = \alpha/\sqrt{mk}$ である. $B(\xi)$ を少し変形すれば,

$$B(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\left(\xi^2 - 1 + \frac{a^2}{2}\right)^2 + a^2 - \frac{a^4}{4}}}. \quad (42.6)$$

したがって, $\xi^2 = 1 - a^2/2$ の $B(\xi)$ は最大値 $2/\sqrt{4a^2 - a^4}$ をとる. もとの表記では,

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2mk}}, \quad (42.7)$$

のとき振幅が最大値,

$$A = \frac{2f}{m\omega_0\gamma} \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}}, \quad (42.8)$$

となる。減衰率が小さく $a \ll 1$ であるときには $A(\Omega)$ は $\Omega \simeq \omega_0$ において鋭いピークを持つようになる。特に $a \rightarrow 0$ では $\Omega = \omega_0$ で振幅は発散する。

次に外力の成す仕事について調べよう。仕事は (25.3) により $W = \int dx F(t)$ と定義される。 $x = x(t)$ という変数変換を行うと、

$$W = \int_{t_0}^t dt \frac{dx}{dt} F(t) =: \int_{t_0}^t dt P(t). \quad (42.9)$$

ここで定義した量 $P(t) = \dot{x}(t)F(t)$ は単位時間あたりに力 F がなす仕事、**仕事率** (power) である。特解 (42.2) から、

$$\dot{x}(t) = \frac{f\Omega}{m} (C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t).$$

ここで表記の簡単のため、

$$C_1 = \frac{\gamma\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}, \quad C_2 = \frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\Omega^2},$$

とおいた。このことから仕事率は、

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{f^2\Omega}{m} \cos \Omega t (C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t) \\ &= \frac{f^2\Omega}{2m} (C_1(1 + \cos 2\Omega t) + C_2 \sin 2\Omega t). \end{aligned}$$

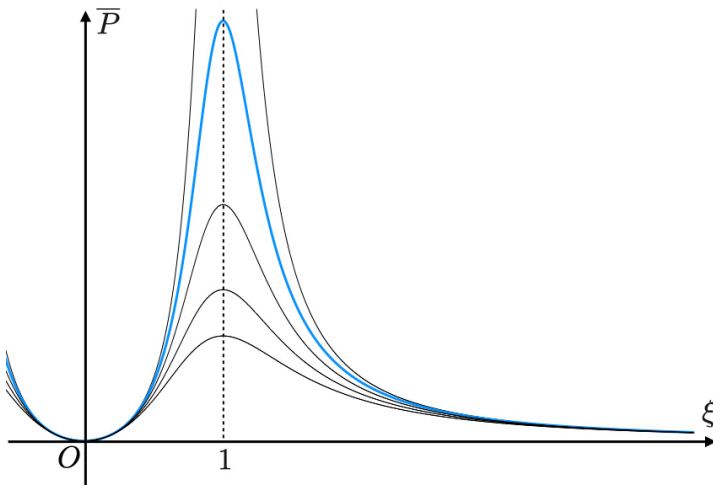


図 75 強制振動の平均の仕事率。 $\xi = 1$ で最大値をとり、減衰率 α が小さいほど鋭いピークを持つ。

時間積分の範囲を強制振動の 1 周期 $T = 2\pi/\Omega$ とすれば、

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T dt \frac{f^2\Omega}{2m} (C_1(1 + \cos 2\Omega t) + C_2 \sin 2\Omega t) \\ &= \frac{f^2\Omega}{2m} C_1 T. \end{aligned}$$

1 周期の間の平均の仕事率を

$$\bar{P} := \frac{1}{T} \int_0^T dt P(t), \quad (42.10)$$

と定義すると上の結果から $\bar{P} = C_1 f^2 \Omega / 2m$ とわかる。 C_1 をあらわに書けば、

$$\bar{P} = \frac{f^2 \gamma}{2m} \frac{\Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}. \quad (42.11)$$

振幅の計算と同様に無次元量 $\xi := \Omega / \omega_0$, $a := \gamma / \omega_0$ を導入すると、

$$\bar{P} = \frac{f^2 \gamma}{2m \omega_0^2} \times \frac{\xi^2}{(\xi^2 - 1)^2 + a^2 \xi^2}.$$

後ろの ξ についての因子は $\xi^2 = 1$ のとき、すなわち $\Omega = \omega_0$ のときに最大値をとることがわかるので、

$$\bar{P} \leq \frac{f^2}{2m\gamma} =: \bar{P}_{\max}, \quad (42.12)$$

が常に成立する。平均の仕事率 \bar{P} は ξ の函数としてみたとき最大値 \bar{P}_{\max} の周りに鋭いピークを持つ。このピークの高さは $1/a^2$ により制御される。 $\Omega = \omega_0$ のときに平均の仕事率が最大ということは、このとき最も効率良く外力が加えられていることになる。これを共鳴 (resonance) という。

身近にこの現象を利用した例としては電子レンジ (microwave oven) が挙げられる。電子レンジは水分子の熱振動に対して、マイクロ波の照射によって周期的外力を加えることで加熱 (エネルギーを与える) する。この照射するマイクロ波の周波数を水分子の振動と共鳴するようにうまく調整することで効率よく加熱できる。他にもラジオの共振回路も共鳴現象を利用している。ラジオでは局毎に固有の振動数が割り当てられていて、ちょうど共鳴する振動数にチューニングしたときに音が聞こえるような仕組みになっている。

\bar{P} が最大値の半分の値をとるときの Ω を Ω_1, Ω_2 ($\Omega_1 < \Omega_2$) とする。 $\Omega_2 - \Omega_1$ は半値幅 (half width) と呼ばれる。 Ω_1, Ω_2 を直接求めるのは難しいので、この 2 つがピーク位置 $\Omega = \omega_0$ に近いとして $\Omega = \omega_0 + \delta\Omega$ とおいて、

$$\frac{\bar{P}_{\max}}{2} = \frac{f^2}{4m\gamma} = \frac{f^2 \gamma}{2m} \frac{(\omega_0 + \delta\Omega)^2}{[(\omega_0 + \delta\Omega)^2 - \omega_0^2]^2 + \gamma^2 (\omega_0 + \delta\Omega)^2},$$

を $\delta\omega$ の 2 次までで解く⁴⁾。両辺から因子 $f^2 \gamma / 2m$ を払って、右辺を整理すると、

$$\frac{1}{2} = \left[\left(\frac{2\omega_0 \delta\Omega + \delta\Omega^2}{\gamma(\omega_0 + \delta\Omega)} \right)^2 + 1 \right]^{-1}.$$

今 $1 \gg \delta\Omega / \omega_0$ であることを用いれば、

$$\frac{1}{2} \simeq \left[\frac{4\delta\Omega^2}{\gamma^2} \left(1 - \frac{\delta\Omega}{\omega_0} \right) + 1 \right]^{-1},$$

⁴⁾ $\delta\Omega$ は Ω_1, Ω_2 に対応する 2 つの解をもつべきなので少なくとも二次まで残す必要がある。

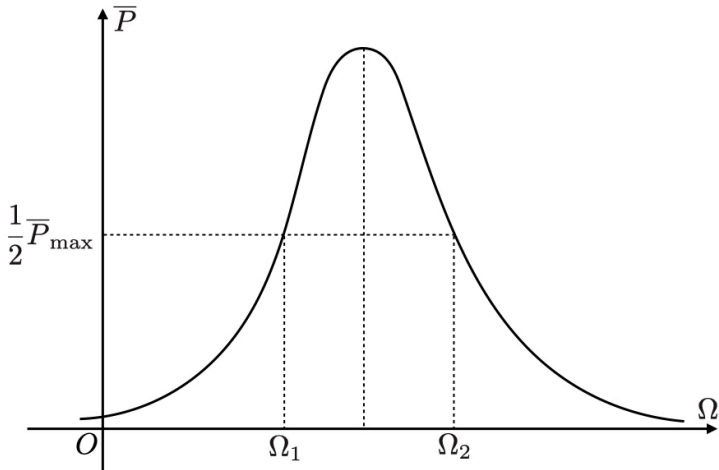


図76 仕事率の半値幅.

と近似できる. 右辺の $[\dots]$ の中で3次以上の項を無視すれば $\delta\Omega \simeq \pm\gamma/2$ であることがわかる. よって半値幅は $\Omega_2 - \Omega_1 \simeq \gamma$ となる. 半値幅を無次元化した次の量を定義する:

$$Q := \frac{\omega_0}{\Omega_2 - \Omega_1}. \quad (42.13)$$

これは **Q 値** (Quality factor) と呼ばれる. 今の問題での Q 値は $Q \simeq \omega_0/\gamma = \sqrt{mk}/\alpha$ である.

Q 値が大きいときは半値幅は狭く共鳴したときの仕事率は良くなるが, 共鳴させるための調整が難しくなる. 一方で Q 値が小さいならば共鳴してもそれほど仕事率は良いわけではなくすぐに振動は減衰する. 防音材などには Q 値の小さいものが使われていて音の振動をすぐに減衰させる役割をする.

PROBLEM

PROBLEM1. 次の運動方程式の特解を Fourier 変換により直接求めよ:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x(t) = \frac{f}{m}\cos\Omega t$$

SOLUTION.

第4章 中心力場

§ 43. 中心力場の解法

中心力場 (central force) とは物体がその中心からの距離にのみ依存し、向きが中心方向（またはその反対向き）の力をうけるようなポテンシャルのことである。すなわちポテンシャルは球対称性を持っていて、同一球面上の質点は同じ大きさの力を受け、力の向きは球面に垂直である。このようなポテンシャルはありふれていて、例えば重力がそうである。地球上では物体はすべて重力によって地球の中心に向かう力を受けている¹⁾。また太陽の重力に引かれて地球や惑星・小惑星は楕円運動（ほぼ円運動）している。彗星は遠方からゆっくりやってきて太陽の近くで急激にターンして遠方に去っていくような楕円軌道を描く。これらの天体に関する事実は Kepler の法則にまとめられる。中心力を理解することは天文学の初歩である。

他方でミクロな世界に視線を向けると、原子も天体同様に中心力場で支配される。原子は（古典力学的な解釈では）原子核の周りに電子が回る構造をしている。核と電子の間に働くのは Coulomb 力とよばれる電磁気的な相互作用である。中心力場は原子の構造を理解する上でも重要となる。

では中心力場の議論に入ろう。質点の原点からの距離を $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ としてポテンシャルを $V = V(r)$ とおく。ここではポテンシャルの発生源（ソース）が何であるかは特定せず一般的に扱う。ただしポテンシャルの中心は空間に固定されているとし、質点の運動のいかなる影響も受けないとする。このポテンシャル中の粒子の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla V(r), \quad (43.1)$$

である。ポテンシャルの微分は次のように計算される：たとえば x 成分については、

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dV(r)}{dr} = \frac{x}{r} \frac{dV(r)}{dr}.$$

ここで2つ目の等号について、この微分を実行するとき y と z は x によらない独立変数だから x 微分にとっては定数と思って計算できて、

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot (2x) = \frac{x}{r},$$

¹⁾ ただし地球は複雑な回転運動をしているため力の向きは正確には中心をむいていない。そのため地球自体も完全な球ではなく楕円体をしている。

を得る。対称性から x を y, z に代えても同様にできるので、結局運動方程式は、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV(r)}{dr}, \quad (43.2)$$

となる。

次のような量を定義する：

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad \text{or} \quad M_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j p_k.$$

これを粒子の**角運動量** (angular momentum) と言う。角運動量ベクトルは粒子の位置と運動量のどちらにも垂直な向きを向いている。角運動量の時間微分をとってみよう。

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ より運動方程式は $\dot{\mathbf{p}} = -\nabla V$ となるから、

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \times \left(-\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV(r)}{dr} \right).$$

平行なベクトルどうしの外積は 0 に等しいので結局、

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{M} = \text{const.} \quad (43.3)$$

つまり中心ポテンシャル中では位置と運動量に垂直な角運動量ベクトルは時間によらず一定で向きも大きさも変えない (**角運動量保存則**)。角運動量が保存することから粒子の位置ベクトルと速度ベクトルは角運動量ベクトルに垂直な平面でしか動くことができない。この平面を外れれば角運動量ベクトルは向きを変え保存則を破ってしまう。こういうわけで中心力ポテンシャル中での粒子の運動はある平面内に限られてしまい、自由度は 2 である。

自由度が 2 ならば粒子の位置を指定する変数は 2 つでよい。たとえばこの平面に x, y 軸をとり角運動量ベクトルと平行に z 軸をとろう。 z 軸をとっても粒子の運動には無関係であるから粒子の位置は $(x, y, 0)$ で指定し中心からの距離も $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ でよい。

今設定した座標系において角運動量保存則の式の成分を具体的に書けば、

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix} = \text{const.},$$

となって結局 1 成分についての保存則となり、独立な式としては 1 つだけである。この平面内に極座標を導入しよう。座標の変換式は次の通り²⁾：

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \\ z &= z. \end{aligned}$$

²⁾ この座標系のこととは 3 次元の円筒座標系ともいう。いまは z 座標が意味を持たないので平面の極座標という言葉をする。

極座標表示では粒子の位置は $(r, \theta, 0)$ で指定される。このとき各成分の速さは、

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{z} &= \dot{z},\end{aligned}$$

である。角運動量の大きさをこれらを代入して計算する：

$$\begin{aligned}(xp_y - yp_x)^2 &= m^2 [r \cos \theta (\dot{r} \sin \theta - r \dot{\theta} \cos \theta) + r \sin \theta (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta)]^2 \\ &= m^2 (r^2 \dot{\theta})^2.\end{aligned}$$

したがって、

$$m^2 r^4 \dot{\theta}^2 = M^2.$$

あるいは正の解をとって、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{M}{mr^2}. \quad (43.4)$$

一方、ポテンシャルが存在しているのでエネルギーも保存する。エネルギー保存則の式は、

$$\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + V(r) = E.$$

ここで速度の 2 乗については、

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2,$$

だから、

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + V(r) = E.$$

ただし粒子の運動は平面内に限っているから $\dot{z} = 0$ であり、さらに角運動量保存則の式 $\dot{\theta} = M/mr^2$ を用いて $\dot{\theta}$ を消去すれば、

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 + V(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E.$$

エネルギー保存則に角運動量に関するポテンシャル項が現れた。これを遠心力ポテンシャルという。この項については次の節で詳細を述べる。保存則を速さについて解けば、

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V^{\text{eff}}(r))}, \quad (43.5)$$

$$V^{\text{eff}}(r) := V(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (43.6)$$

注目すべきはこの方程式に現れる変数が座標 x, y, z などではなくポテンシャル中心から粒子までの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ だけで θ は消去されたということである。変数 r と t を右辺と左辺に分離して両辺を時間積分しよう。すると、

$$\pm \int dt = \int dt \frac{dr}{dt} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V^{\text{eff}}(r))}} = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V^{\text{eff}}(r))}}.$$

これを計算すれば距離 r の時間変化の式が得られる。

以上から粒子の軌道を決定する 2 つの式が得られた：

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{M}{mr^2}, \quad (43.7)$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V^{\text{eff}}(r))}. \quad (43.8)$$

この 2 式に初期条件を加えることによって粒子の軌道は r, θ の関数として完全に決定する。

§ 44. 極座標

円運動や中心力場の運動の記述で登場した極座標について理解を深めよう。ここでは 2 次元と 3 次元の極座標を紹介するが任意の次元へ拡張可能である。

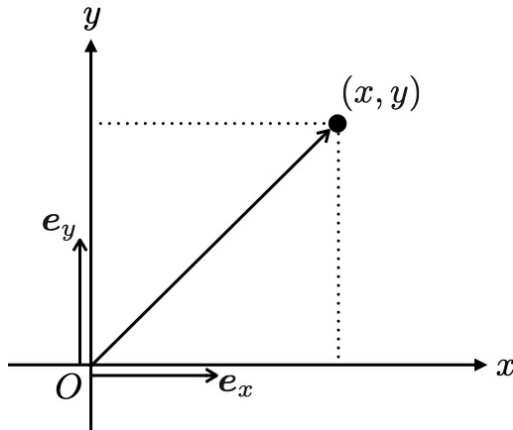


図 77 二次元直交座標

まずは 2 次元空間の直交座標の復習から始める。直交座標は 2 つの軸 x, y を直交するようにとる。 x 軸に平行で大きさが 1 のベクトル $\mathbf{e}_x = (1, 0)$, y 軸に平行で大きさが 1 のベクトル $\mathbf{e}_y = (0, 1)$ をとると

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0, \quad (44.1)$$

を満たす。この 2 つのベクトルは x, y 軸の目盛りの役割をする。ある点の座標が $\mathbf{r} = (x, y)$ とは x 軸の値から x , y 軸の値から y を読み取ったことを表していた。それをベクトルの和で明示的に書くと

$$(x, y) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y,$$

と展開できる。速度ベクトル \mathbf{v} は

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y,$$

である。勾配 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y},$$

とかける。微分は右に作用するので基本ベクトルは左に書いておく。

ここで**基本ベクトル**を導入する。基本ベクトルは大きさが 1 のベクトルであり座標軸に平行なベクトルの組み $\{e_i\}$ のことである。基本ベクトルの個数は座標軸の数だけあり、したがって考えている空間の次元に一致する。各座標軸は直交するので 2 次元の直交座標では上でも与えた、

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (44.2)$$

が基本ベクトルである。基本ベクトルが与えられれば任意の位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ を

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y = \sum_{i=1}^2 x_i \mathbf{e}_i, \quad (44.3)$$

と一意に展開できる。 e_1, e_2, \dots, e_N を N 次元空間の一般の基本ベクトルとし、 \mathbf{v} を任意のベクトルとすると、

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N v_i \mathbf{e}_i,$$

と一意に展開できる。このとき現れる係数 v_i をベクトル \mathbf{v} の i 成分という。基本ベクトルたちは次の正規直交関係を満たす：

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

もし $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ならばかならず $v_1 = \dots = v_N = 0$ となる。なぜならば $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ のとき、両辺 e_1 との内積をとってみると正規直交関係から $e_1 \cdot \mathbf{v} = v_1 = 0$ となる。同様に e_2, \dots, e_N との内積をとれば他の係数も 0 であることがわかる。³⁾

2 次元の直交座標系の任意の点は (x, y) と指定される。これに対して動径座標 r と角度座標 θ を導入して原点からの距離と x 軸となす角度によって座標を (r, θ) で指定するのが**極座標** (polar coordinate) である。ベクトルの成分 (v_x, v_y) は基本ベクトルを e_x, e_y をとったときの係数を並べていると解釈できる。本稿では (v_x, v_y) は特に注釈がなければ直交座標における成分とする。2 つの座標は座標変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (44.4)$$

で結ばれている。 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲である。逆変換は

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad (44.5)$$

³⁾ 一般に任意のベクトルを一意に展開できるベクトルの組みを**基底** (basis) という。基底の存在は Zorn の補題と同値であり任意のベクトル空間で保証される。基底のうち、大きさが 1 であつ互いに直交するものを**正規直交基底**という。さらに正規直交基底のうち各基底ベクトルが座標軸に平行なものを基本ベクトルと呼んでいる。ここでは基底の一般論は省略した。

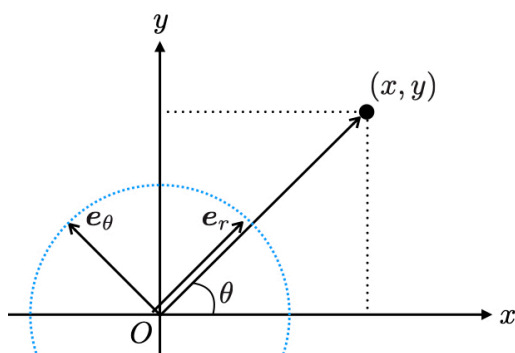


図 78 極座標

である。ただし $x \neq 0$ 。 $x = 0$ で $y \neq 0$ ならば $\theta = \operatorname{arccot}(x/y)$ とすればよい。しかし原点 $x = y = 0$ では θ を定めることができない。実際原点は $r = 0$ であり動径と x 軸のなす角を定義できない。したがって極座標は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ の上で定義された座標系である。物理学において極座標系の原点が問題になることはほとんどない。

点 (x, y) が与えられると (r, θ) が決まり、 r 軸、 θ 軸が定まる。直交座標系において極座標の基本ベクトルを見ると、

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (44.6)$$

であることがわかる（ここでのベクトルの上は x 成分、下は y 成分である⁴⁾）。極座標は直交座標系から見ると r 軸は原点から考えている点へ向かって伸び、 θ 軸はそれと直交するようになる。つまり同じ \mathbb{R}^2 平面の中でも角度によってその軸のとり方が変わる。右辺を直交座標の基本ベクトルで展開すれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (44.7)$$

これは直交座標から極座標への変換の式である。行列表記では

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}. \quad (44.8)$$

これは角度 θ の回転変換である。

速度ベクトルは考えている点でとっている r, θ 軸で成分を見る。ここで基本ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ も時間に依存していることに注意しなければならない。微小時間で点が動くと r, θ 軸

⁴⁾ この節では一般の基本ベクトルの導出はしない。一般相対性理論の章において任意の座標での基本ベクトルについて論じる。

も回転し向きが変換する．直交座標での式を利用して計算すれば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e_r &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \dot{\theta}e_\theta, \\ \frac{d}{dt}e_\theta &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = -\dot{\theta}e_r,\end{aligned}$$

よって速度ベクトルは位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y) = re_r$ の時間微分をとって

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(re_r) = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta,$$

となる．

座標の任意の函数 $f(x, y)$ の勾配 ∇f を極座標表示しよう．座標変換 $x = x(r, \theta)$, $y = y(r, \theta)$ を x, y が r, θ の函数であるとみて鎖法則を適用すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta},\end{aligned}$$

と計算される．したがって、

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}e_\theta,$$

あるいは極座標での微分演算子として

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{44.9}$$

とかける．ここで e_θ は θ に依存するので微分演算子より左に置かなければならないことに注意せよ．

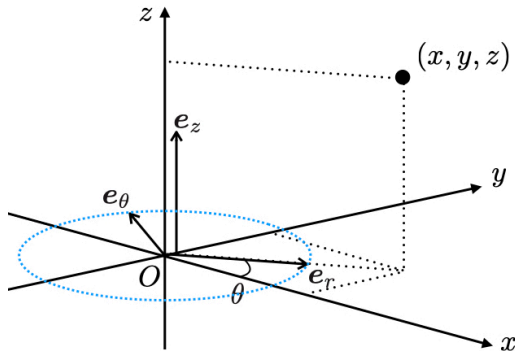


図 79 円筒座標

では次に 2 次元の平面極座標を 3 次元へ拡張しよう．それには円筒座標と球面極座標の 2 通りの座標の取り方がある．1 つ目の**円筒座標**は単に平面極座標に z 軸を加えたものである．直交座標 (x, y, z) から円筒座標 (r, θ, z) への座標変換は

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \tag{44.10}$$

である. やはり $x = y = 0$ (z 軸) では角度 θ は定義できないことに注意せよ. 円筒座標では r は点と z 軸との距離に等しい.

基本ベクトルは

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (44.11)$$

に選べば良い. 直交座標からの基本ベクトルの変換としてかけば

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}. \quad (44.12)$$

これは z 軸周りの角度 θ 回転である.

速度ベクトルと勾配は

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z, \quad (44.13)$$

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (44.14)$$

と計算される.

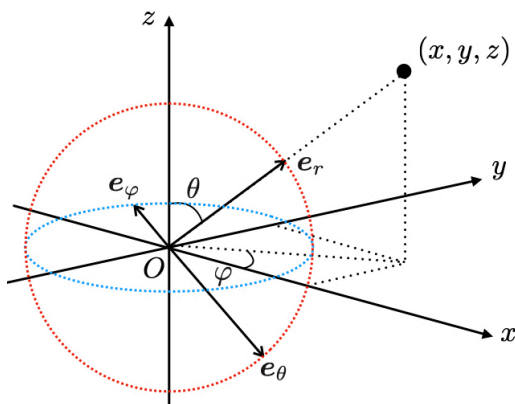


図 80 球面極座標

次の座標のとり方は平面の回転を球面上の回転に拡張したものである. これを**球面極座標**または**球座標**という. 球面極座標では動径座標 r と 2 つの角度座標, 極角 θ と方位角 φ を用いる. 2 つの角度座標は地球の経緯度と似た概念である. ある位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ について, その大きさが r , 方位角 φ は xy 平面での向き, 極角 φ は z 軸となす角である. 座標変換は

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (44.15)$$

である。 θ は $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動き、 φ は $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ の範囲を動く。 z 軸上では方位角 φ を定義できず、さらに原点では θ も定義できないことに注意せよ。

基本ベクトルは

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (44.16)$$

に選べば良い。直交座標からの基本ベクトルの変換としてかけば

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}. \quad (44.17)$$

速度ベクトルと勾配は

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad (44.18)$$

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (44.19)$$

と計算される。

§ 45. 中心力場と極座標

われわれは前節で中心力場中では平面極座標を導入することが自然なことをみた。ここでははじめから Newton 方程式に平面極座標を導入してさきほどの結果を導出してみよう。中心力場中では角運動量が保存することとそれゆえ粒子の運動が平面内に限られることは知っているものとする。そこで同じようにその平面に x, y 座標を入れて垂直な方向に z 軸をとる。

中心力場中の粒子の運動方程式を再びかくと、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV(r)}{dr}, \quad (45.1)$$

この右辺を次のように書き換える：

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{x}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{e}_x - \frac{y}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{e}_y - \frac{z}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{e}_z.$$

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ は各 x, y, z 軸方向の単位ベクトルでありその成分は $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ である。これらを直交座標系の基本ベクトルという。いま直交座標系の基本ベクトルたちを極座標系の基本ベクトルに書き換えることが目標である。

書き換えの式を導出する前に基本ベクトルについて復習しよう。3次元空間を考えたとき任意のベクトルは3つの基本ベクトルの線形結合でかくことができる。つまり $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ を一般の基本ベクトルとし、 \mathbf{v} を任意のベクトルとすると、

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3,$$

と一意にかける．このとき現れる係数をベクトル \boldsymbol{v} の成分という．基本ベクトルたちは次の正規直交関係を満たす：

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}.$$

すなわち基本ベクトルは大きさが 1 で，互いに直交している．もし $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ ならばかならず $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ となる．なぜならば $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ のとき，両辺 \boldsymbol{e}_1 との内積をとってみると正規直交関係から $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{v} = v_1 = 0$ となる．同様に $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ との内積をとれば他の係数も 0 であることがわかる．

直交座標から極座標への変換は，

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

によって行われる．各座標の時間微分をもう一度書くと，

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{z} &= \dot{z}. \end{aligned}$$

さらにもう一度時間微分をとって加速度は，

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta, \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta, \\ \ddot{z} &= \ddot{z}, \end{aligned}$$

と表される．したがって加速度ベクトルは，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \ddot{z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ここで極座標の基本ベクトルとして，

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (45.2)$$

を選ぶ．実際この 3 つのベクトルは正規直交関係 $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ を満たすことは容易にわかる． \boldsymbol{e}_r は動径方向の単位ベクトルであり， \boldsymbol{e}_θ はこれに垂直方向で角度の増加する向きを向く．基本ベクトルは座標変数が増加する向きの単位ベクトルに一致する．

これを用いると加速度ベクトルは，

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z. \quad (45.3)$$

一方，運動方程式の右辺は，

$$-\frac{x}{r} \frac{dV(r)}{dr} \boldsymbol{e}_x - \frac{y}{r} \frac{dV(r)}{dr} \boldsymbol{e}_y - \frac{z}{r} \frac{dV(r)}{dr} \boldsymbol{e}_z = -\frac{dV(r)}{dr} \boldsymbol{e}_r - \frac{z}{r} \frac{dV(r)}{dr} \boldsymbol{e}_z.$$

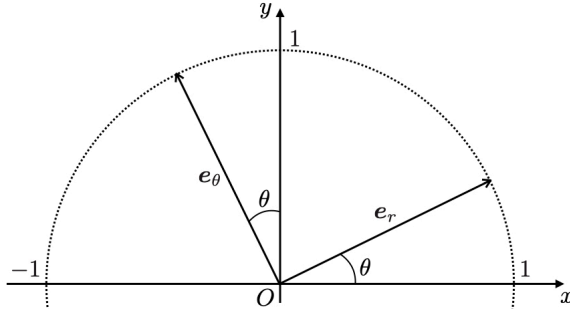


図 81 極座標の基本ベクトル

以上から平面極座標での運動方程式は次のようになる：

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + m\ddot{z}\mathbf{e}_z = -\frac{dV(r)}{dr}\mathbf{e}_r - \frac{z}{r}\frac{dV(r)}{dr}\mathbf{e}_z.$$

すべての項を左辺にまとめると,

$$\left(m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{dV(r)}{dr}\right)\mathbf{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \left(m\ddot{z} + \frac{z}{r}\frac{dV(r)}{dr}\right)\mathbf{e}_z = 0.$$

基本ベクトルの性質から次の3つの方程式がえられる：

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV(r)}{dr}, \tag{45.4}$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0, \tag{45.5}$$

$$m\ddot{z} = -\frac{z}{r}\frac{dV(r)}{dr}.$$

粒子の運動は平面内に限られその位置は $(r, \theta, 0)$ によって指定されるとしているので第3の方程式は関係ない. 第1, 第2の方程式が粒子の運動を決定する.

第2の方程式の両辺に r をかけると,

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

ゆえに $M = mr^2\dot{\theta}$ という量が保存量となる. これは先に見た角運動量保存則である. さらにこの保存則によって第1の方程式から $\dot{\theta}$ を消去すれば,

$$m\ddot{r} = -\frac{dV(r)}{dr} + \frac{M^2}{mr^3}.$$

両辺に \dot{r} をかけて時間について積分すると,

$$(\text{l.h.s.}) = \int_{t_0}^t dt m\dot{r}\ddot{r} = \int_{t_0}^t dt \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\dot{r}^2),$$

$$(\text{r.h.s.}) = \int_{t_0}^t dt \frac{dr}{dt} \left(-\frac{dV(r)}{dr} + \frac{M^2}{mr^3} \right) = \int_{r(t_0)}^{r(t)} dr \left(-\frac{dV(r)}{dr} + \frac{M^2}{mr^3} \right).$$

こうすると積分が実行できて、

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + V(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E. \quad (45.6)$$

ここで、

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}(t_0) + V(r(t_0)) - \frac{M^2}{2mr(t_0)^2},$$

という定数で上にえられた結果はエネルギー保存則に一致する．あとは前節と同様の式変形により粒子の軌道を決定する方程式がえられる．

動径 r についての 2 階の微分方程式をもういちど見てみよう．

$$m\ddot{r} = -\frac{dV(r)}{dr} + \frac{M^2}{2mr^2} = -\frac{dV^{\text{eff}}(r)}{dr}. \quad (45.7)$$

この式は普通の運動方程式と同じ形の微分方程式である．ただし直交座標では現れなかった新たな力の項 M^2/mr^3 が付け加わっている．この項は角運動量保存則によって現れた項で、**遠心力ポテンシャル** (centrifugal force) とよばれる．遠心力ポテンシャルは速度の 2 乗に由来していて、 $\dot{\theta}$ が消去され r のみ依存する中心力ポテンシャルの形となっている．それゆえ、このポテンシャルから導かれる「遠心力」はあたかも e_r の方向に加わっているようにみえるが、実際には存在しない力、「見かけの力」である．なぜこのような項が現れたかという点、われわれが直交座標から極座標へ移ったときに座標系（基本ベクトル）をも取り替えていることに起因する．座標系の取り替えは観測者の取り替えを意味していた．極座標の基本ベクトル e_r, e_θ は xy 座標から見ると成分に θ を含むので時間依存している． e_r は x 軸との角度が θ の単位円上の点であり、 e_θ は $\theta + \pi/2$ の点を示している．つまりこの取り替えではわれわれは静止系から観測者自身が角速度 $\dot{\theta}$ で回転するような回転座標系に移っているのである．そうするともはや慣性基準系ではなくなり慣性の法則は成り立たないが、慣性力の項を加えることで慣性の法則を取り戻す．慣性力は座標変換に伴ってあらわれる項だったからいまの場合遠心力がまさにそれである．遠心力ポテンシャルと実際の中心力ポテンシャルを一緒にして一つのポテンシャルと見なしたものを**有効ポテンシャル** (effective potential) という．

エネルギー保存則を有効ポテンシャルで書くと

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + V^{\text{eff}}(r) = E. \quad (45.8)$$

速度の 2 乗は必ず正であることから

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = E - V^{\text{eff}}(r) \geq 0,$$

という不等式が成立しなければならない．つまり質点の（動径の）軌道は必ず有効ポテンシャルより上のエネルギー一定の領域に限られる．特に $V(r)$ が原点で発散しない場合は遠心力ポテンシャルの効果により原点に無限に高い障壁が現れる．そのため質点は原点に近づくことはできても到達はできない．最接近するときの動径は $E = V(r)$ の解のうち $r > 0$ かつ最小のものである．このとき保存則より $\dot{r} = 0$ であるから質点の動径方向の速度は 0 となる．し

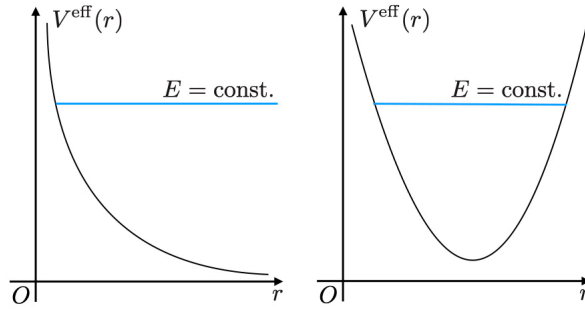


図 82 有効ポテンシャルとエネルギー一定領域により質点の可能な軌道が定まる。左側では遠心力ポテンシャルの影響で原点にポテンシャルの壁（斥力芯）が存在し、そこで質点は軌道を転回する。右側は質点の軌道は有界領域に束縛されている。

たがって原点に向かってくる質点 ($\dot{r} < 0$) はこの最小の $r = r_{\min}$ で転回し原点から遠ざかる ($\dot{r} > 0$) 軌道に変わる。 r_{\min} を質点の軌道の**転回点** (turning point) という。

また有効ポテンシャルの谷にエネルギー一定領域が入っている場合は r に最小値と最大値が存在し、質点の軌道は有界な領域に限られる。これは天体の運動などが当てはまる。

PROBLEM

PROBLEM1. 自由場 $V(r) = 0$ の場合に平面極座標を用いて質点の軌道を求めよ。

SOLUTION.

§ 46. Coulomb ポテンシャル

中心力ポテンシャルのうちでもっとも親しみ深い例として、次の形のポテンシャルを考えよう：

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}. \tag{46.1}$$

ここで α は定数である。これは **Coulomb ポテンシャル** とよばれ、静電気力、重力などはこの形をしている。質点に働く力は

$$\mathbf{F}(r) = -\nabla V(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{46.2}$$

なので、 $\alpha > 0$ ならば中心向きの引力を表し、 $\alpha < 0$ ならば中心から外へ向かう方向の斥力を表す。

起動を求めよう。中心力場の公式から、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{M}{mr^2}, \tag{46.3}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2} \right)}, \tag{46.4}$$

を解けば Coulomb ポテンシャル中の粒子の軌道は決定される。(46.4)の右辺は動径 r のみなので変数分離により直ちに積分が実行できて $r = r(t)$ を求めることができる。あるいは辺々割り算して、

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \pm \frac{mr^2}{M} \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2} \right)},$$

も変数分離により積分が実行できて $r = r(\theta)$ を求めることができる。ここでは後者で計算を進める。 r による部分と θ による部分に変数分離して両辺 θ 積分しよう、

$$\pm \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{r_0}^r dr \frac{M}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2} \right)}}.$$

右辺の積分を計算するために $r = 1/\rho$ と変数変換すると、

$$dr = -\frac{1}{\rho^2} d\rho = -r^2 d\rho, \quad \begin{array}{l|l} r & r_0 \rightarrow r \\ \rho & 1/r_0 \rightarrow 1/r \end{array}$$

であって、

$$\begin{aligned} (\text{r.m.s.}) &= - \int_{1/r_0}^{1/r} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2} + \frac{2m\alpha}{M^2}\rho - \rho^2}} \\ &= - \int_{1/r_0}^{1/r} \frac{d\rho}{\sqrt{-(\rho - \frac{m\alpha}{M^2})^2 + \frac{2mE}{M^2} + (\frac{m\alpha}{M^2})^2}}, \end{aligned}$$

となる。積分を見やすくするために次のようにおこう：

$$\beta = \sqrt{\frac{2mE}{M^2} + \left(\frac{m\alpha}{M^2}\right)^2}$$

さらに変数変換 $\rho - (m\alpha/M^2) = \beta \cos \varphi$ を行えば、

$$d\rho = -\beta \sin \varphi d\varphi, \quad \begin{array}{l|l} \rho & 1/r_0 \rightarrow 1/r \\ \varphi & \varphi_0 \rightarrow \varphi \end{array}$$

となるので積分計算を続けると、

$$(\text{r.m.s.}) = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{-\beta \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{-\beta^2 \cos^2 \varphi + \beta^2}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \varphi - \varphi_0.$$

左辺の積分は $\pm \int d\theta = \pm \theta - \theta_0$ だから両辺の定数項をまとめて C とおけば、 $\varphi = \pm \theta + C$ となる。ここにあらわれる定数項 C は角度 θ の初期値に依存した項である。角度の測りはじめは観測者の自由なので $C = 0$ ととってもかまわない。したがって

$$\varphi = \pm \theta,$$

である。変数変換の式を逆に辿って $\varphi \rightarrow \rho \rightarrow r$ と戻していく。まず ρ と φ の変換式から、

$$\rho = \frac{m\alpha}{M^2} + \beta \cos \theta.$$

次に $\rho = 1/r$ より,

$$r = \frac{1}{\frac{m\alpha}{M^2} + \beta \cos \theta} = \frac{\gamma}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (46.5)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{M^2}{m\alpha}, \\ \epsilon &= \gamma\beta = \sqrt{1 + \frac{2M^2 E}{m\alpha^2}}. \end{aligned} \quad (46.6)$$

よって粒子の軌道の式 $r = r(\theta)$ が得られた.

軌道を詳しく調べるために直交座標に戻してみよう. その際は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r \cos \theta$ をもちいて,

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \epsilon x = \gamma.$$

簡単な式変形により,

$$(1 - \epsilon^2) \left(x + \frac{\gamma\epsilon}{1 - \epsilon^2} \right)^2 + y^2 = \frac{\gamma^2}{1 - \epsilon^2}. \quad (46.7)$$

つまり ϵ によった 2 次曲線となる. ϵ はエネルギーと角運動量の大きさに依存した量である. 角運動量が固定されていると粒子の軌道はエネルギーだけで完全に決まる.

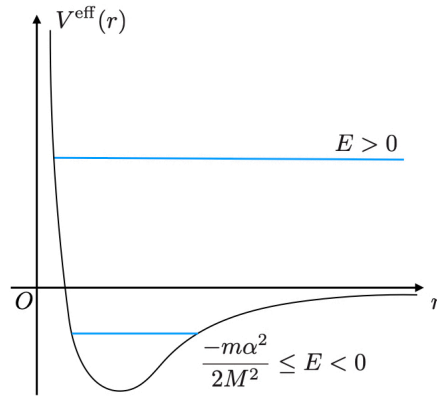


図 83 有効ポテンシャルは束縛領域 $-m\alpha^2 \leq E < 0$ と散乱領域 $0 \leq E$ とに分かれる. 原点に近いところでは遠心力ポテンシャルが優勢で斥力が働き原点から遠ざける. 他方原点から離れたところでは Coulomb ポテンシャルが優勢になり引力が働いて質点を原点に引きつける.

では $\alpha > 0$ として引力の場合を議論する. エネルギー保存則において左辺第 1 項 $mr^2/2$ は必ず正の値なので, 不等式 $E + (\alpha/r) - (M^2/2mr^2) \geq 0$ が成立する. つまり 2 次不等式

$$Er^2 + \alpha r - \frac{M^2}{2m} \geq 0,$$

を満たす r の範囲で質点は運動する. 転回点 ($\dot{r} = 0$) は等号成立のときなので

$$r = -\frac{\alpha}{2E} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2M^2}{m\alpha^2} E} \right) = -\frac{\alpha}{2E} (1 \pm \epsilon).$$

$V^{\text{eff}}(r)$ の最小値は平方完成により $r = M^2/m\alpha$ のとき $-m\alpha^2/2M^2$ である. したがって質点のエネルギーは $E \geq -m\alpha^2/2M^2$ でなければならない. この条件は転回点を実数として存在するための条件と等価である. また転回点はグラフより明らかに $E < 0$ で 2 つ, $E \geq 0$ で 1 つ存在する. すなわち $-m\alpha^2/2M^2 \leq E < 0$ で質点は有界運動であり, $E \geq 0$ では r の最小値で転回する軌道となる.

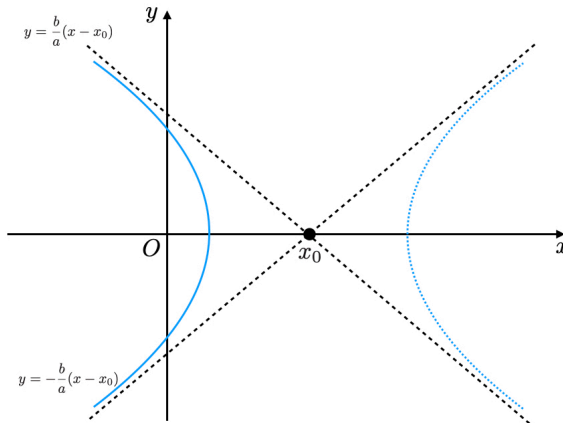


図 84 $E > 0$ のときの質点の双曲線軌道. 常に $x > 0$ である軌道 (青点線) では $r < 0$ なので除外される.

まず $E > 0$ のときから考えよう ($E = 0$ は特殊なので後述する). このとき $\epsilon > 1$ であり, (46.7) において $1 - \epsilon^2$ は負の値となるから軌道は原点を焦点とする双曲線となる:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (46.8)$$

ここで x_0, a, b は正の定数で,

$$x_0 = \frac{\gamma\epsilon}{\epsilon^2 - 1}, \quad a = \frac{\gamma}{\epsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{\gamma}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}.$$

式 (46.5) ではある θ の値 $\cos \theta_\infty = -1/\epsilon$ で r が発散することがわかる. すなわち質点はこの角度 θ_∞ の方向へ無限遠にまっすぐ飛んでいく (あるいは飛んでくる) ように見える. 双曲線の式を y について解くと

$$y = \pm \frac{b(x - x_0)}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{(x - x_0)^2}},$$

となるが x, y が非常に大きい極限では平方根の中の第 2 項は無視できる. よって $r \rightarrow \infty$ においては, 双曲線は 2 つの直線

$$y = \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1} \left(x - \frac{\gamma\epsilon}{\epsilon^2 - 1} \right), \quad (46.9)$$

に漸近する. 粒子はこの漸近線に沿って無限遠からやってきてやがて Coulomb ポテンシャルに引きつけられて軌道を曲げながら原点のソースに接近する. 最接近するのは $\cos \theta = 1$ のとき

$$r_{\min} = \frac{\gamma}{1 + \epsilon}, \quad (46.10)$$

である. そして再びもうひとつの漸近線に近づきながら無限遠に去っていく. したがって角度は $-\theta_\infty < \theta < \theta_\infty$ の範囲に限られる. 他方 $-\pi \leq \theta < -\theta_\infty$ と $\theta_\infty < \theta \leq \pi$ の領域では $r < 0$ となるので除外される. $\cos \theta_\infty < 0$ なので $\theta_\infty > \pi/2$ である. そのため, $x = r \cos \theta$ より $-\pi \leq \theta < -\theta_\infty$ と $\theta_\infty < \theta \leq \pi$ の領域では常に $x > 0$ である. よって双曲線軌道のうち常に $x > 0$ となる方が除外される.

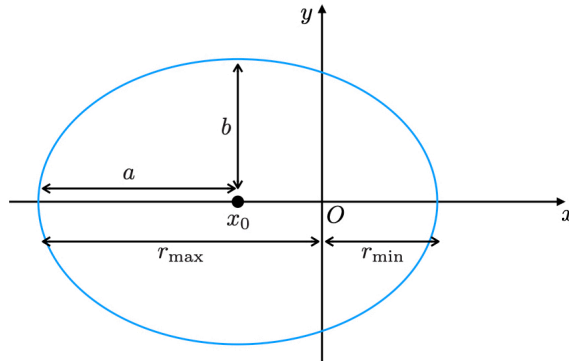


図 85 $-\alpha/2M^2 \leq E < 0$ のときの質点の楕円軌道.

次に $-\alpha/2M^2 \leq E < 0$ のときを考える. このとき $0 \leq \epsilon < 1$ であり (46.7) において $1 - \epsilon^2$ は正の値となるから軌道は原点を焦点とする楕円になる:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (46.11)$$

ここで x_0 は負, a, b は正の定数で (双曲線のときとの違いに注意せよ),

$$x_0 = -\frac{\gamma\epsilon}{1 - \epsilon^2}, \quad a = \frac{\gamma}{1 - \epsilon^2}, \quad b = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

したがって粒子の軌道は有界であり, r が発散することはない. 楕円の式で $\xi = (x - x_0)/a, \eta = y/b$ の変換をすると中心原点, 半径 1 の円の式 $\xi^2 + \eta^2 = 1$ となる. つまり楕円は円を x 軸方向に a 倍, y 軸方向に b 倍した形をしている. 長半径は $a = \gamma/(1 - \epsilon^2)$, 短半径は $b = \gamma/\sqrt{1 - \epsilon^2}$ である.

最後は $E = 0$ の場合である. このときは $\epsilon = 1$ となり式 (46.5) より, $r = \gamma/(1 + \cos \theta)$ となる. すなわち質点の軌道は放物線となる:

$$x = -\frac{1}{2\gamma}(y^2 - \gamma^2). \quad (46.12)$$

動径 r は $\theta = \pm\pi$ で発散しているが, これは放物線の両端 ($y \rightarrow \pm\infty$) に対応する. 粒子が無限遠から飛んでくると Coulomb ポテンシャルに引きつけられ軌道を曲げながら最小値のところまで近づき再び無限遠へ飛び去るのがこの場合である. ちょうど楕円と双曲線の分岐に当たる中立 (marginal) な軌道である.

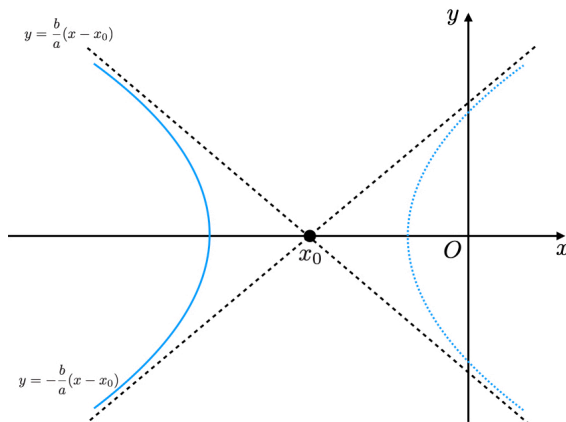


図 86 斥力のかきの質点の双曲線軌道. 青点線の軌道では $r < 0$ なので除外される.

斥力 $\alpha < 0$ の場合は引力の場合より単純である. 有効ポテンシャルは $V^{\text{eff}}(r) = (|\alpha|/r) + (M^2/2mr^2)$ なので常に正の値を取る単調減少函数である. したがって $E > 0$ であり有界領域は存在せず, 必ず双曲線軌道となる:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (46.13)$$

ここで x_0 は負, a, b は正の定数で ($\gamma < 0$ に注意せよ),

$$x_0 = -\frac{|\gamma|\epsilon}{\epsilon^2 - 1}, \quad a = \frac{|\gamma|}{\epsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{|\gamma|}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}.$$

同様に動径 r は $\cos \theta_\infty = -1/\epsilon$ を満たす角度 θ_∞ で発散する. $-\theta_\infty < \theta < \theta_\infty$ の領域において $r < 0$ となるので質点の軌道としては除外される. 他方 $-\pi \leq \theta < -\theta_\infty$ と $\theta_\infty < \theta \leq \pi$ の領域では $r > 0$ であり質点の軌道が対応する. $x = r \cos \theta$ において $r > 0$ かつ $\cos \theta < 0$ より常に軌道は $x < 0$ となる. 漸近線の式は引力と同様で $y = \pm b(x - x_0)/a$. 原点のソースに弾き返されるような軌道を描くことがわかる.

§ 47. Newton 重力と場

Newton のもっとも大きな功績といえば質量をもつが全ての物体に関する重力の法則の発見

である。とりわけ地上の物体（たとえばリング）の落下現象と惑星の公転運動を同じ現象として説明したことは重要である。質点間の重力は次の逆二乗則にしたがう：

$$\mathbf{F}_G(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (47.1)$$

ここで $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ は 2 質点間の距離である。 m_1, m_2 はそれぞれの質量であり重力は質量に比例する。そして G は比例定数で**重力定数**とか Newton 定数とよばれる。この法則は Cavendish の実験 (1797-98) によって最初に見出された⁵⁾。

G と質量は必ず正の値なので重力は必ず引力となる。 G の実際の値は、

$$G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \quad (47.2)$$

であり非常に小さいことがわかる⁶⁾。ポテンシャルは、

$$V_G(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{r}, \quad (47.3)$$

である。ただし無限遠で $V_G(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ となるように定数項を定めた。これは単なるエネルギーの原点の取り方の問題である。Newton 重力は Coulomb ポテンシャルに分類される。またポテンシャルが存在するので質点のエネルギーは保存する。

質点に働く重力は遠隔作用のように見える。すなわち、摩擦力や張力、垂直抗力などと異なり質点どうしが接触していなくても重力相互作用が発生する。この現象を理解するためには場という概念を導入する必要がある。

質量 m の質点 1 つに着目してそれがたくさんの他の質量 m_1, \dots, m_N の質点と重力相互作用しているとする。それぞれの質点どうしは逆二乗則にしたがう力を受けているので着目する質点の運動方程式は

$$m\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) = -\sum_{i=1}^N \frac{Gmm_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

で与えられる。ポテンシャルは

$$V_G(\mathbf{r}) = -m \sum_{i=1}^N \frac{Gm_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = m\phi_G(\mathbf{r}).$$

ここで \mathbf{r} は着目する質点の位置ベクトル、 \mathbf{r}_i は質量 m_i の質点の位置ベクトルである。 ϕ_G は**重力ポテンシャル**という。質点を感じる重力、または重力ポテンシャルはその他の質点の位置関係に依存している。逆に言えば、ある時刻での周りの質点の位置が与えられているとき、位置 \mathbf{r} ごとに重力ポテンシャルが決まる。

ある時刻 t で位置 \mathbf{x} に質点を置いたときに受ける重力ポテンシャルを $\phi_G(t, \mathbf{x})$ と置く。重力ポテンシャルはある時刻での質点の集団や、大きさのある物体、その他質量のある実体から

⁵⁾ Cavendish, Henry (1798), "Experiments to Determine the Density of the Earth", in MacKenzie, A. S., Scientific Memoirs Vol.9: The Laws of Gravitation, American Book Co., 1900

⁶⁾ <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg>

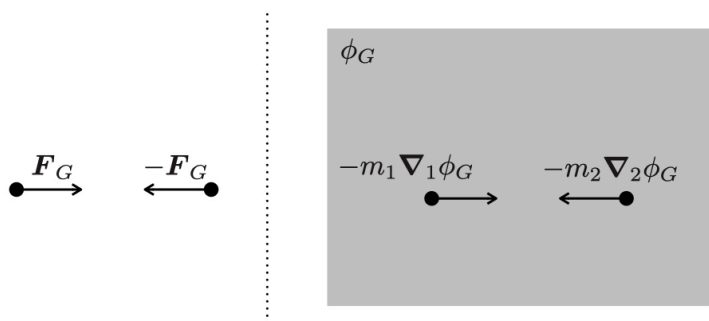


図 87 遠隔作用（左）と場の近接作用（右）の考え方。左では2質点が相互作用している。右では質点それぞれが空間に充満した重力場と相互作用している。

受ける重力相互作用の総和である。重力源がなんであろうと質点の運動方程式に関与するのは時刻 t 、位置 \boldsymbol{x} におかれたときに感じる重力ポテンシャル $\phi_G(t, \boldsymbol{x})$ だけである。つまり ϕ_G とは着目する質点がおかれる時空の性質と捉えることができる。時空全体に重力ポテンシャルという実体が充満して存在し質点に重力を働きかけると考えるのである。この時空全体に充満した実体（あるいは時空の性質の変化）を場 (field) という。今は重力なので特に**重力場** (gravitational field) という。この立場では重力相互作用は質点と重力場の近接相互作用と解釈される。

着目する質点にはたらく重力が重力場で記述できることがわかっていても、重力場そのものをどのように求めるかという問題が残る。たとえば2質点の系ではそれぞれの質点の運動方程式 $m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -m_1 \nabla_1 \phi_G$ と $m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -m_2 \nabla_2 \phi_G$ と重力場 ϕ_G を決める方程式が必要である。重力のソース（源）が質点の場合は逆二乗則の和でかけばよいが、大きさのある物体や流体などでは事情が異なる。たとえば重力場に対して重ね合わせの原理を仮定して線型微分方程式を導くというやり方がある。これに関しては剛体の章で論じる。しかし一般には重力場を決定する微分方程式は線型ではなく非線型な方程式であることがわかっている。重力場の方程式の詳細は一般相対性理論の章で論じる。

重力場以外にも自然界には場で捉えることのできる現象が多々存在する。電磁場は重力場について身近な例であろう。ミクロな世界では弱い相互作用、強い相互作用による力が存在しこれらは場で記述できる。さらにミクロな世界では質点も一種の場と解釈してしまって全ての物理現象を場で表現する。こうした場のみによる物理現象の記述方法は**場の理論** (field theory) とよばれ、物理学のあらゆる分野に影響を与えた。ミクロな理論だけでなく、熱力学や統計力学といったマクロな理論でも場の考え方を導入できる。場の理論については（古典論の範囲で）電磁気学の章で詳しく述べる。

場には1つ問題点がある。1つの質点のつくる場 ϕ と質点自身の相互作用、**自己エネルギー** (self energy) の問題である。逆二乗則にしたがえば質点と質点の作る重力場の相互作用ポテンシャル $\phi_G(r \rightarrow 0)$ は無限大に発散している。この発散はエネルギーの原点をずらして、無限大をあらかじめ加えて質点の運動エネルギーと有限の重力ポテンシャルが残るように調整

すれば解決される。こうした発散の問題は場の理論に常について回る。これは場という量が連続関数であるのに対し、現実世界がかならずしも連続な物理量を許さないことによる。詳しくは場の理論の章で述べることにする。

次節では Newton 重力理論の応用を紹介する。

§ 48. Kepler の法則

太陽の周りを回る惑星の運行に関する観測データから導かれた Kepler の法則を Newton の重力理論から導こう。太陽の質量 M_{\odot} が惑星より非常に重いとする。他の惑星との重力相互作用は無視して、太陽のつくる重力のみの中での質量 $m (m \ll M_{\odot})$ の惑星の運動を考える。太陽の方は重いので運動方程式から加速度は小さく、ゆえにその運動は無視できる。たとえば地球と太陽の重力相互作用を調べる場合、太陽は地球の 10^5 倍程度の質量を持つためこの近似を適用できる。したがって太陽重力のもとでの惑星の運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_{\odot}m}{r^3}\mathbf{r},$$

である。ここで M_{\odot} は太陽質量、 m は惑星の質量⁷⁾であり、原点は太陽の中心にとっている。

次に Newton の重力理論に Coulomb ポテンシャルの議論を適用する。重力の場合は引力のみであるので常に $\alpha = GM_{\odot}m > 0$ である。§46 の結果から軌道は、

$$r = \frac{\gamma}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (48.1)$$

ここで、

$$\gamma = \frac{L^2}{GM_{\odot}m^2}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{G^2M_{\odot}^2m^3}}, \quad (48.2)$$

である。 E, L は惑星のエネルギーと角運動量である。 $\epsilon < 1$ ($E < 0$) のときには楕円軌道となる。すなわち重力にしたがって有界運動するときには一般に楕円軌道をとる。これを **Kepler の第一法則**という。Kepler 以前は全ての天体は円運動していると信じられていたが実際には円軌道からずれていることが示された。

角運動量保存則から $L = mr^2\dot{\theta}$ が時間によらない。楕円軌道のどの点でもこの値は不変となる。 L のうち質量は定数であるからそれを抜き出して、 $L = 2m\sigma$ とおこう。このとき、

$$\sigma = \frac{L}{2m} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}, \quad (48.3)$$

という量も保存量である。右の式を見るとこの σ はちょうど単位時間 dt に惑星が描く軌跡と重力源（太陽）を結んでできる三角形の面積 dS に等しい。すなわち $\sigma = dS/dt$ 。詳しく言うと、 $r\dot{\theta}dt$ が惑星の軌跡の長さに等しく三角形の高さに相当し、底辺は軌道半径の r が相当する。これを**面積速度保存則**といい、惑星の場合には **Kepler の第二法則**とよばれる。

⁷⁾ \odot は太陽を表す記号である。

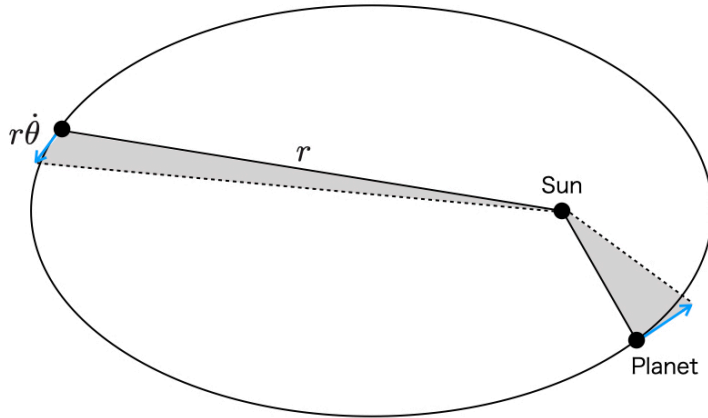


図 88 面積保存則

最後に惑星の公転周期について考えてみよう。周期 T は $dt = (2m/L)dS$ より,

$$T = \int_0^T dt = \int dS \frac{2m}{L} = \frac{2mS}{L}.$$

ここで S は楕円の面積であり πab に等しい。長半径, 短半径 a, b はすでに $\gamma/\sqrt{1-\epsilon^2}$ と $\gamma/(1-\epsilon^2)$ とわかっているから,

$$T = \frac{2m\pi}{L} \frac{\gamma^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_\odot}} a^{3/2}. \quad (48.4)$$

すなわち $T^2 \propto a^3$ という関係がわかる。これを **Kepler の第三法則** という。

以上の三法則が Kepler の法則である。Kepler の法則は天体や重力に限られない, Coulomb ポテンシャルであれば成り立つ普遍的な性質であることに注意せよ。

厳密には太陽の運動方程式も考慮しなければならない。太陽の位置ベクトルを \mathbf{r}_\odot とし

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{GM_\odot m}{r_{\text{rel}}^3} \mathbf{r}_{\text{rel}}, \\ M_\odot \ddot{\mathbf{r}}_\odot &= +\frac{GM_\odot m}{r_{\text{rel}}^3} \mathbf{r}_{\text{rel}} \end{aligned}$$

この 2 式から相対座標についての運動方程式

$$\mu \mathbf{r}_{\text{rel}} = -\frac{GM_\odot m}{r_{\text{rel}}^3} \mathbf{r}_{\text{rel}}, \quad (48.5)$$

が導かれる。ここで相対座標 $\mathbf{r}_{\text{rel}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot$ 。ここで $\mu = M_\odot m / (M_\odot + m)$ は換算質量。パラメータは

$$\gamma = \frac{L^2}{GM_\odot m \mu}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu(GM_\odot m)^2}},$$

に置き換わる．このとき保存角運動量は $L = \mu r_{\text{rel}}^2 \dot{\theta}$ であり Kepler の第二法則は

$$\sigma = \frac{L}{2\mu} = \text{const.}$$

となる．これから（相対座標の）公転周期を計算すれば

$$T = \frac{2\mu\pi}{L} \frac{\gamma^2}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{G(M_{\odot} + m)}} a^{3/2},$$

と補正される．

§ 49. Laplace–Runge–Lenz ベクトル*

Coulomb ポテンシャルのもとでの質点の運動には特別な保存則が存在する．まず簡単に Coulomb ポテンシャル $V(r) = -\alpha/r$ について復習しよう．運動方程式から導かれる質点の軌道は (46.5) と (46.6) より，

$$r = \frac{\gamma}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad (49.1)$$

$$\gamma = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2M^2 E}{m\alpha^2}}, \quad (49.2)$$

と与えられる． E はエネルギーで， M は角運動量で，

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (49.3)$$

と定義され ($\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ は運動量)，中心力場下では両方とも保存量である．また ϵ は離心率といい，軌道の形を決めるパラメータである．この節では引力 $\alpha > 0$ で楕円軌道 $0 \leq \epsilon < 1$ の場合を考える．

次で定義されるベクトルは保存量である：

$$\mathbf{A} := \mathbf{p} \times \mathbf{M} - \frac{m\alpha}{r} \mathbf{r}. \quad (49.4)$$

このベクトルは **Laplace–Runge–Lenz ベクトル**，または短く **Lenz ベクトル** という．以下では **LRL ベクトル** と呼ぶことにする．LRL ベクトルが保存量であることを示そう．時間で微分すると，

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{M} + \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{M}} - m\alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right),$$

となる．第 2 項は角運動量保存則より落ちる．第 1 項は運動方程式 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = -\nabla V(r)$ を用いて，

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{M} = -\frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{M}.$$

角運動量の定義を代入して， $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}$ より，

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{M} = \frac{\alpha}{r} \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^2} \mathbf{r} \right),$$

となる。第 3 項の時間微分を計算すると、

$$-m\alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -m\alpha \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2} \mathbf{r} \right) = -\frac{\alpha}{r} \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^2} \mathbf{r} \right),$$

となる。ただし 2 つ目の等号では $\dot{r} = (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})/r = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})/(mr)$ を用いた。これは第 1 項とキャンセルし、結局 $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ がわかる。

LRL ベクトルの大きさを計算しよう。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= (\mathbf{p} \times \mathbf{M})^2 - 2m\alpha(\mathbf{p} \times \mathbf{M}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + (m\alpha)^2 \\ &= p^2 M^2 - \frac{2m\alpha}{r} M^2 + (m\alpha)^2 \\ &= 2m \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \right) M^2 + (m\alpha)^2 \\ &= 2mEM^2 + (m\alpha)^2. \end{aligned}$$

2 つ目の等号では $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$ であることと \mathbf{p} と \mathbf{M} が直交すること、スカラー三重積の公式を用いた。最後の式で $(m\alpha)^2$ でくくると、LRL ベクトルの大きさが、

$$|\mathbf{A}| = m\alpha\epsilon, \quad (49.5)$$

であることがわかる。

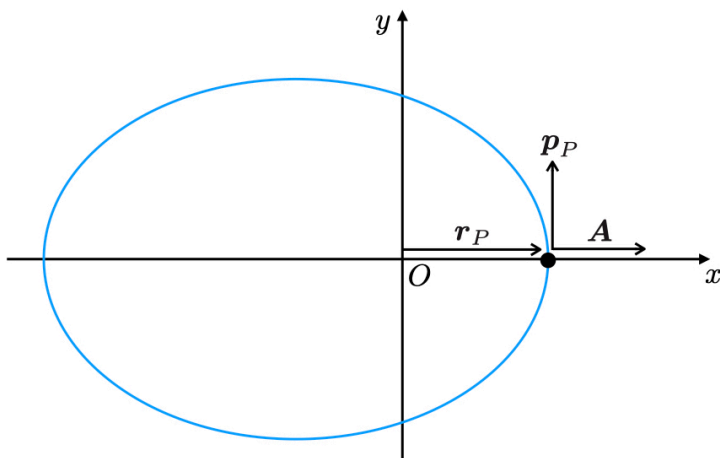


図 89 LRL ベクトルと近点

近点(質点が最も焦点に近づく点)の座標を $\mathbf{r} = r_P$ とおくと、この座標において $\mathbf{r}_P \cdot \mathbf{p}_P = 0$ が成り立つ ($\mathbf{r}_P = r_P \mathbf{e}_r$ であり、運動量は近点で転回するので動径成分は 0 より導かれる)。近点での角運動量の大きさは $M = p_P r_P$ 、離心率は、

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2}{m\alpha^2} \left(\frac{p_P^2}{2m} - \frac{\alpha}{r_P} \right) p_P^2 r_P^2} = 1 - \frac{p_P^2 r_P}{m\alpha},$$

となる。これらを用いて近点における LRL ベクトルを計算すると、

$$\mathbf{A} = m\alpha\epsilon \frac{\mathbf{r}_P}{r_P}, \quad (49.6)$$

がわかる。つまり LRL ベクトルは質点の運動の間、近点の位置ベクトルと同じ方向を向き、大きさは $m\alpha\epsilon$ のままのベクトルである。近点が時間によらず動かないことは軌道の不変性を意味する。すなわち軌道が閉じる。これは LRL ベクトルが保存する Coulomb ポテンシャルに特有な現象である。

LRL ベクトルと位置ベクトルの内積をとると

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{p} \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{r} - m\alpha r.$$

左辺において \mathbf{A} と \mathbf{r} がなす角を θ とおけば $|\mathbf{A}|r \cos \theta = m\alpha\epsilon r \cos \theta$ となる。一方右辺ではスカラー三重積の公式から $(\mathbf{p} \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{r} = M^2$ なので

$$m\alpha\epsilon r \cos \theta = M^2 - m\alpha r,$$

これを整理すれば軌道の式 (49.1) を得る。

§ 50. 天体の三体問題*

二体問題は重心座標と相対座標に分離できれば比較的容易に解くことができた。特に 2 つの物体に働く力が距離 (相対位置ベクトルの大きさ) のみに依存するならば 2 つの方程式は独立になる。しかし三体以上では仮にこのような力のみであっても厳密解を一般的に求めるのは非常に困難である。

Coulomb ポテンシャルのような簡単な場合でも難しさは変わらない。ただ実用上、重力相互作用する多体系の問題は宇宙工学や天文学において重要である。この節では**三体問題** (three body problem) にいくつかの制限を課すことで解を導こう。

重力相互作用する 3 つの天体の運動方程式は

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{Gm_1 m_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3), \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= -\frac{Gm_2 m_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \frac{Gm_2 m_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3), \\ m_3 \frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} &= -\frac{Gm_3 m_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) - \frac{Gm_3 m_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (50.1)$$

あるいはまとめて

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -\sum_{i \neq j} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (50.2)$$

である。

この方程式に対してまず 1 つ目の仮定として、3 つの天体は同一平面上を運動するとしよう (平面三体問題)。そしてその平面上に xy 座標系を適当に設定して二次元の問題として捉える。平面と直交する z 軸方向の運動は考えない。

さらに 2 つ目の仮定として 3 つの天体のうち 2 つは残りの 1 つより非常に重く $m_2, m_3 \gg m_1$ が成り立つとしよう (制限三体問題). すると $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ の運動方程式に着目すると m_1 を含む項は相対的に無視できて

$$\begin{aligned} m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &\simeq -\frac{Gm_2 m_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3), \\ m_3 \frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} &\simeq -\frac{Gm_3 m_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2), \end{aligned}$$

としても良い. よって $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ については二体問題として扱うことができ重心座標 \mathbf{r}_G と相対座標 $\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$ に分離できる. Coulomb ポテンシャルの一般論から重心座標は等速直線運動し, 相対座標の運動方程式は

$$\mu_{23} \frac{d^2 \mathbf{r}_{23}}{dt^2} = -\frac{Gm_2 m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23}, \quad \mu_{23} = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} \quad (50.3)$$

となり楕円, 放物線, 双曲線のいずれかの軌道となる.

さらに仮定としてこの重たい 2 つの天体の軌道は円軌道であるとしよう (円制限三体問題). 円軌道の場合は半径 r_{23} が一定で角速度は

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{M_{23}}{\mu_{23} r_{23}^2} =: \omega, \quad (50.4)$$

で一定となる (M_{23} は角運動量で時間に依らない定数). 円軌道の場合は離心率 $\epsilon = 0$ に対応し $r_{23} = \gamma = M^2 / (\mu G m_2 m_3)$ なので角運動量を消去して

$$\omega^2 = \frac{G(m_2 + m_3)}{r_{23}^3}, \quad (50.5)$$

の関係をj得る. 相対座標の軌道は

$$\mathbf{r}_{23}(t) = r_{23} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (50.6)$$

となる.

原点を m_2, m_3 の重心にとり角速度 ω で回転する座標系に移る. 回転座標系での基底は

$$\mathbf{e}_{x'} = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{y'} = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{z'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (50.7)$$

にとる. 平面 $z' = 0$ 上の任意の位置ベクトルは $\mathbf{r} = x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'}$ と展開できる. 相対座標については $\mathbf{r}_{23} = r_{23} \mathbf{e}_{x'}$ で静止して見える. 重たい二天体 $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ は $\mathbf{r}_G = \mathbf{0}$ のことから

$$\mathbf{r}_2 = -p r_{23} \mathbf{e}_{x'}, \quad \mathbf{r}_3 = (1-p) r_{23} \mathbf{e}_{x'}, \quad p = \frac{m_3}{m_2 + m_3}, \quad (50.8)$$

の位置で静止していることがわかる.

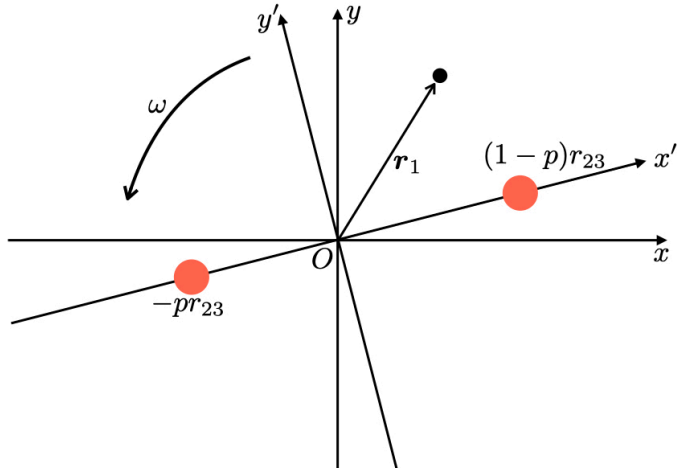


図 90 回転座標系から見た三天体の位置関係

この回転座標系から残りの軽い天体の運動を見ていこう。基底 $e_{x'}$, $e_{y'}$ が時間に依存し $\dot{e}_{x'} = \omega e_{y'}$, $\dot{e}_{y'} = -\omega e_{x'}$ となることに注意して加速度は

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = (\ddot{x}'_1 - 2\omega \dot{y}'_1 - \omega^2 x'_1) e_{x'} + (\ddot{y}'_1 + 2\omega \dot{x}'_1 - \omega^2 y'_1) e_{y'}$$

したがって運動方程式の成分はそれぞれ

$$\begin{aligned} \ddot{x}'_1 - 2\omega \dot{y}'_1 - \omega^2 x'_1 &= -G \left[\frac{m_2(x'_1 + pr_{23})}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x'_1 - (1-p)r_{23})}{r_{13}^3} \right], \\ \ddot{y}'_1 + 2\omega \dot{x}'_1 - \omega^2 y'_1 &= -G y'_1 \left(\frac{m_2}{r_{12}^3} + \frac{m_3}{r_{13}^3} \right). \end{aligned} \tag{50.9}$$

ここで

$$r_{12} = \sqrt{(x'_1 + pr_{23})^2 + y_1'^2}, \quad r_{13} = \sqrt{(x'_1 - (1-p)r_{23})^2 + y_1'^2}. \tag{50.10}$$

得られた運動方程式 (50.9) は依然として複雑であり解析的に解くのは難しい。そこで軽い天体が重たい天体と共動する場合、すなわち今考えている回転座標系で三天体が全て静止して見えるような定常解を求めてみよう。このとき $\ddot{x}'_1 = \ddot{y}'_1 = 0$ かつ $\dot{x}'_1 = \dot{y}'_1 = 0$ なので方程式はさらに

$$\begin{aligned} \omega^2 x'_1 - G \left[\frac{m_2(x'_1 + pr_{23})}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x'_1 - (1-p)r_{23})}{r_{13}^3} \right] &= 0, \\ \omega^2 y'_1 - G y'_1 \left(\frac{m_2}{r_{12}^3} + \frac{m_3}{r_{13}^3} \right) &= 0, \end{aligned} \tag{50.11}$$

に還元される。

2つ目の方程式に ω の定義 (50.5) を代入すると

$$y'_1 \left(\frac{m_2}{r_{12}^3} + \frac{m_3}{r_{13}^3} - \frac{m_2 + m_3}{r_{23}^3} \right) = 0,$$

となる。すなわち

$$y'_1 = 0, \quad \text{or} \quad \frac{m_2}{r_{12}^3} + \frac{m_3}{r_{13}^3} - \frac{m_2 + m_3}{r_{23}^3} = 0, \quad (50.12)$$

である。前者 $y'_1 = 0$ の場合では、 x'_1 についての方程式

$$\frac{x'_1}{r_{23}^3} - (1-p) \frac{x'_1 + pr_{23}}{|x'_1 + pr_{23}|^3} - p \frac{x'_1 - (1-p)r_{23}}{|x'_1 - (1-p)r_{23}|^3} = 0,$$

が成立する。左辺を x'_1 の関数 $f(x'_1)$ とおく。グラフから明らかなように $f(x)$ は $x < -pr_{23}$ と $-pr_{23} < x < (1-p)r_{23}$ と $(1-p)r_{23} < x$ の3つの範囲に1つずつ零点をもつ。対応する点をそれぞれ L_3, L_1, L_2 とラベルする。このとき $y'_1 = 0$ なので三天体は x' 軸上に直線状に並ぶことになる。

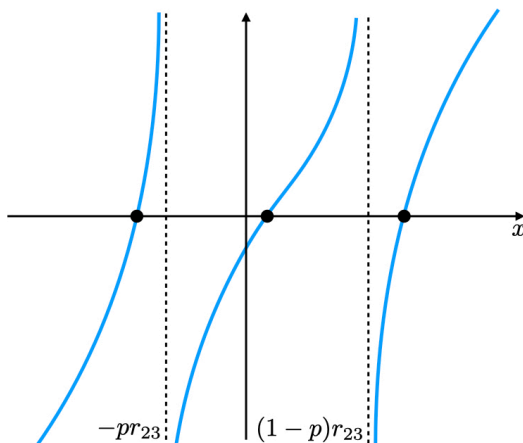


図91 関数 f の概形

次に (50.12) の後者の場合には (50.11) の1つ目の式から

$$\begin{aligned} 0 &= \omega^2 x'_1 - G \left[\left(\frac{m_2}{r_{12}^3} + \frac{m_3}{r_{13}^3} \right) (x'_1 + pr_{23}) - \frac{m_3 r_{23}}{r_{13}^3} \right] \\ &= -Gr_{23} \left(\frac{m_3}{r_{23}^3} - \frac{m_3}{r_{13}^3} \right), \end{aligned}$$

となるから $r_{13} = r_{23}$ がわかる。(50.12) からさらに $r_{12} = r_{23}$ もわかる。以上からこの場合3つの天体は正三角形をなす。重たい天体が固定されているときに軽い天体を正三角形を成すように配置できる点は2つ存在しそれぞれ L_4, L_5 とラベルする。

以上から重力相互作用する三体問題で同一平面で2つが重く、円軌道を描く場合の共動解が得られた。軽い天体が静止できる5点 L_1, \dots, L_5 は **Lagrange 点** と呼ばれる。実は L_1, L_2, L_3 に比べて L_4, L_5 の方が外部からの摂動に対して安定的である。たとえば太陽と惑星をここでの重たい二天体としたとき、Lagrange 点 L_4, L_5 にあたる領域に共同する軽い天

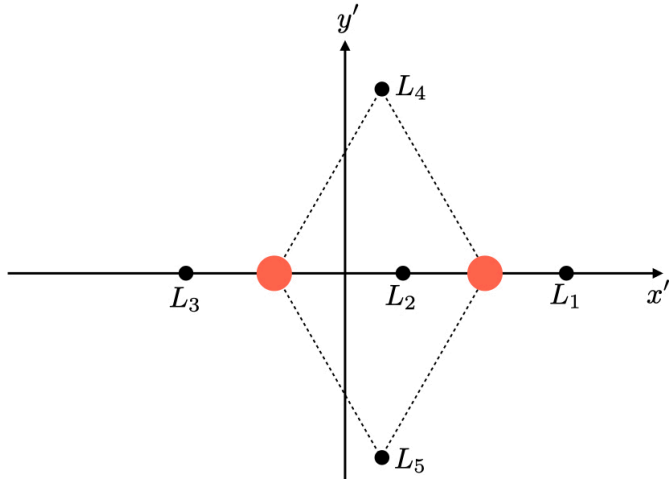


図 92 Lagrange 点

体（小惑星）が安定的に存在できる．これらの小惑星群は**トロヤ群** (Trojan asteroid) と呼ばれる．

§ 51. 体積積分

この節では考えている空間と同じ自由度の領域上で定義された関数の積分について考える．たとえば二次元平面内の円上で定義された関数や，三次元空間内の立方体上で定義された関数の積分など．ただここでは三次元空間内にある二次元曲面の積分には触れない（三次元空間内の一次元曲線上の積分は線積分の節で紹介した）．曲面上の積分については節を改めて議論する．

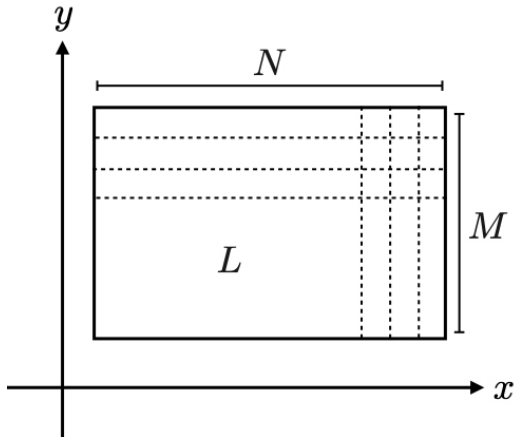


図 93 長方形の分割

まず二次元平面 \mathbb{R}^2 内の長方形領域 L を考える．考え方は 1 変数の通常の積分と同じで区分解法を応用する．二次元平面内に xy 直交座標を長方形と平行になるように設定し，領域 L を $N \times M$ 個の小さな長方形に分割する．各長方形に番号を振って左から i 番目 ($1 \leq i \leq N$)，下から j 番目 ($1 \leq j \leq M$) の長方形を L_{ij} とする． L_{ij} の x 軸方向の長さを h_x ， y 軸方向の長さを h_y とすると，面積は $h_x h_y$ ．長方形 L は x 軸の区間 $[a, b]$ と y 軸の区間 $[c, d]$ の直積集合 $[a, b] \times [c, d]$ とかける．このとき $h_x = (b - a)/N$ ， $h_y = (d - c)/M$ ．

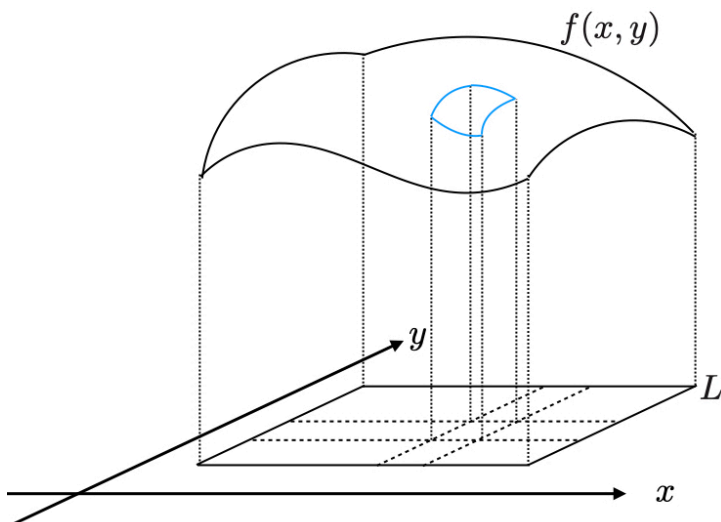


図 94 長方形 L_{ij} と f のグラフで囲まれた角柱

長方形 L 上の函数 $f(x, y)$ と xy 平面で囲まれた領域の体積 V を次のように求める：微小長方形 L_{ij} 内での最小値 $\min_{(x,y) \in L_{ij}} f$ ，最大値 $\max_{(x,y) \in L_{ij}} f$ をそれぞれ高さとした 2 種類の四角柱の体積の総和で挟むことができ、

$$\sum_{i,j} h_x h_y \min_{(x,y) \in L_{ij}} f \leq V \leq \sum_{i,j} h_x h_y \max_{(x,y) \in L_{ij}} f. \quad (51.1)$$

分割を細かくして $N, M \rightarrow \infty$ ($h_x, h_y \rightarrow 0$) とする極限において 2 つの角柱の和が一致するとき積分確定といい、

$$\int_L dx dy f(x, y) := \lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{i,j} h_x h_y f, \quad (51.2)$$

が定まる．ただし f は L_{ij} 内の点における値ならどれでもよい．

次に任意の二次元領域 D の上で定義された函数 f の積分に拡張したい． D が有界ならば $D \subset L$ なる長方形 L が存在する．さらに L 上の函数

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1 & ((x, y) \in D) \\ 0 & ((x, y) \notin D) \end{cases}, \quad (51.3)$$

を定義する。これは**特性函数** (characteristic function) または**定義函数**と呼ばれる。特性函数 χ_D と函数 f の積を L 上で積分することで、 D 上での f の積分を定義する：

$$\int_D dx dy f(x, y) := \int_L dx dy \chi_D(x, y) f(x, y). \quad (51.4)$$

$dx dy$ を体積要素といい、略して $d^2\mathbf{x}$ または dS と記すこともある。また上記の積分を二次元の**体積積分**という。

実際の計算は積分変数 1 つずつについて積分を実行する、**累次積分**で計算できる。区分求積法の式で和を分解して

$$\int_D dx dy f(x, y) = \lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_i h_x \sum_j h_y f,$$

後ろの和 $\sum_j h_y f$ の意味を考える。 i を固定して y 軸方向に幅 h_y で高さ f の長方形を足し上げている。これは積分区間 $[c(x), d(x)]$ の上での 1 変数 y の積分と同じである。ただし $c(x)$ は領域 D の下側の境界線を表す曲線で $d(x)$ は同様に上側の境界線を表す。その後で x 軸方向に幅 h_x 、底面積 $\sum_j h_y$ の薄い板の体積を足し上げる。 $c(x), d(x)$ の x 軸上の定義域を $[a, b]$ とすれば、

$$\int_D dx dy f(x, y) = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy f(x, y),$$

という 2 つの 1 変数積分に帰着される。これは y について先に積分しているが、 x 軸方向でも同様である。その場合、境界に注意して

$$\int_D dx dy f(x, y) = \int_r^s dy \int_{p(x)}^{q(x)} dx f(x, y),$$

などと計算できる。

例として中心原点、半径 R の円 $D(R)$ の上での積分について考えてみよう。定義より

$$V = \int_{D(R)} dx dy f(x, y).$$

円の境界は上側が $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ と下側が $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ によって囲まれている。この境界線の x 軸上の定義域は $[-R, R]$ なので

$$V = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy f(x, y),$$

で計算できる。積分の順序を入れ替えると、

$$V = \int_{-R}^R dy \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} dx f(x, y).$$

では体積積分の変数変換について見ていこう。1 変数の場合に $s = s(t)$ によって積分変数を変えると ds/dt の因子が加わった。これは座標軸の目盛りの間の変換式と同じである。

準備として二次元のベクトルの外積を定義する．三次元での外積は 2 つのベクトルから 1 つの (擬) ベクトルを作る演算であったが，二次元においては 2 つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} から 1 つのスカラーを作る演算，

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := a_1 b_2 - a_2 b_1 = \sum_{i,j} \epsilon_{ij} a_i b_j, \quad (51.5)$$

で定義される．ここで ϵ_{ij} は二次元での Levi-Civita 記号． $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$ を計算して内積が $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$ を用いて整理すると $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$ がわかる．すなわち外積は 2 つのベクトルから作られる平行四辺形の面積に等しい．

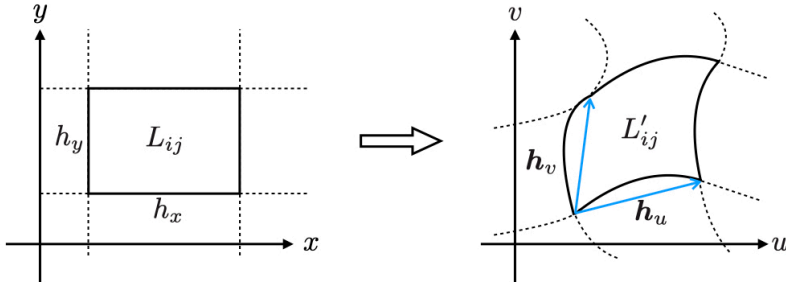


図 95 変数変換による長方形 L_{ij} の変換

この外積を利用して積分の定義に現れた微小な長方形 L_{ij} の面積を再定義しよう．長方形 L_{ij} の 4 つの頂点の座標を直交座標で (x, y) , $(x + h_x, y)$, $(x, y + h_y)$, $(x + h_x, y + h_y)$ とする．すると L_{ij} は 2 つの相対ベクトル $\mathbf{h}_x = (h_x, 0)$ と $\mathbf{h}_y = (0, h_y)$ で囲まれ，面積は $|\mathbf{h}_x \times \mathbf{h}_y| = \sum_{i,j} \epsilon_{ij} (h_x)_i (h_y)_j$ である．

では変数変換により (x, y) から (u, v) へ積分変数を変える．このとき長方形 L_{ij} の 4 つの頂点は

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(x + h_x, y) \\ v(x + h_x, y) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(x, y + h_y) \\ v(x, y + h_y) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(x + h_x, y + h_y) \\ v(x + h_x, y + h_y) \end{pmatrix},$$

に移される．この 4 点が作る長方形 L'_{ij} の面積は

$$\begin{aligned} |\mathbf{h}_u \times \mathbf{h}_v| &= \left[\begin{pmatrix} u(x + h_x, y) \\ v(x + h_x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \right] \times \left[\begin{pmatrix} u(x, y + h_y) \\ v(x, y + h_y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

で計算される．一般に長方形 L_{ij} が長方形 L'_{ij} に移されるわけではない (変換が線型とは限らない) が, $h_x, h_y \rightarrow 0$ の極限ではその誤差が無視できる (証明は省略)．同じ h_x, h_y の一次の精度までで u, v を Taylor 展開すれば

$$\begin{aligned} |\mathbf{h}_u \times \mathbf{h}_v| &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} h_x h_y = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right| h_x h_y \\ &= \left| \sum_{i,j} \epsilon_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| \cdot |\mathbf{h}_x \times \mathbf{h}_y|, \end{aligned}$$

となる.

ここで2つの長方形の面積の比についてももう少し詳しく見ていこう. 次の 2×2 の行列を定義する:

$$J := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (51.6)$$

これを二次元の **Jacobi 行列** という. Jacobi 行列を用いて長方形の変換の式は

$$|\mathbf{h}_u \times \mathbf{h}_v| = |\det J| \cdot |\mathbf{h}_x \times \mathbf{h}_y|, \quad (51.7)$$

とかける. Jacobi 行列の行列式は **Jacobian** と呼ばれる. J の逆行列は変数 u, v が互いに独立であることと微分の鎖法則から

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad (51.8)$$

である. したがって区分求積法の式から,

$$\begin{aligned} \int_D dx dy f(x, y) &= \lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{i, j} |\mathbf{h}_x \times \mathbf{h}_y| \chi_{D'} f \\ &= \lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{i, j} |\det J|^{-1} |\mathbf{h}_u \times \mathbf{h}_v| \chi_{D'} f \\ &= \int_{D'} du dv |\det J|^{-1} f(x(u, v), y(u, v)), \end{aligned}$$

と変数変換される. D' は領域 D を変数変換した領域.

変数変換の例として極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を考えよう. Jacobi 行列は

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}. \quad (51.9)$$

よって $|\det J|^{-1} = r$ と求まる. 中心原点, 半径 R の円 $D(R)$ の上での積分については極座標での円が $0 \leq r \leq R$ と $0 \leq \theta < 2\pi$ で囲まれた長方形なので

$$\int_{D(R)} dx dy f(x, y) = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta r f(x(r, \theta), y(r, \theta)),$$

という形の累次積分に帰着できる.

最後に三次元へ拡張しよう. 実は任意の次元でも全く同様の議論で拡張することができる. 三次元では3つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が作る平行六面体の体積がスカラー三重積

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \sum_{i, j, k} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k, \quad (51.10)$$

で表せることを思い起こす.

任意の三次元の領域 V に対して $V \subset L$ なる直方体 L を考え, 特性函数 $\chi_V(x, y, z)$ との積を用いて V 上の f の体積積分を

$$\int_V dx dy dz f(x, y, z) = \lim_{N_x, N_y, N_z \rightarrow \infty} \sum_{i, j, k} |\mathbf{h}_x \cdot (\mathbf{h}_y \times \mathbf{h}_z)| \chi_V f \quad (51.11)$$

で定義する. 直交座標では体積 $|\mathbf{h}_x \cdot (\mathbf{h}_y \times \mathbf{h}_z)| = h_x h_y h_z$ の直方体の和. 三次元体積要素 $dx dy dz$ は $d^3\mathbf{x}$, dV などと略記される. 三次元体積要素は3つのベクトルから作られるスカラーなのでパリティ変換で符号が変わる擬スカラーである.

変数変換 $(x, y, z) \mapsto (u_1, u_2, u_3)$ には三次元の Jacobi 行列

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix},$$

の行列式が現れる. これはスカラー三重積が二次元の外積と同じく Levi-Civita 記号でかけることに由来する.

例として直交座標から球面極座標への変数変換では

$$|\det J|^{-1} = r^2 \sin \theta, \quad (51.12)$$

と計算される. ただし $0 \leq \theta \leq \pi$ なので $\sin \theta \geq 0$.

PROBLEM

PROBLEM1. 次の積分を計算せよ:

$$I = \int_{D(R)} dx dy e^{-x^2 - y^2}.$$

ただし $D(R)$ は原点中心, 半径 R の円.

SOLUTION. 極座標へ移ると,

$$I = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta r e^{-r^2}.$$

被積分函数は θ によらないので θ 積分は先に実行できて 2π となる.

$$I = 2\pi \int_0^R dr r e^{-r^2}.$$

r 積分についても1変数の積分として計算できて

$$I = -\pi \int_0^R dr \frac{d}{dr} e^{-r^2} = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

PROBLEM2. 次の積分を計算せよ:

$$I = \int_{F_3} dx dy \frac{1}{[ax + by + c(1 - x - y)]^3}.$$

ただし F_3 は平面 $x + y = 1$ と $x \geq 0, y \geq 0$ で囲まれた直角三角形領域, a, b, c は相異なる定数.

SOLUTION. 累次積分を

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[ax + by + c(1-x-y)]^3},$$

の範囲で実行できる. まず y 積分に着目すると

$$I_y = \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(b-c)y + A]^3}.$$

である. ただし y に関係ない部分を $A = (a-c)x + c$ とおいた. これは容易に積分できて

$$\begin{aligned} I_y &= \left[\frac{-1}{2(b-c)} \frac{1}{[(b-c)y + A]^2} \right]_0^{1-x} \\ &= \frac{-1}{2(b-c)} \left[\frac{1}{[(a-b)x + b]^2} - \frac{1}{[(a-c)x + c]^2} \right]. \end{aligned}$$

あとは x 積分についても 1 変数の積分として容易に計算できる:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx I_y \\ &= \frac{-1}{2(b-c)} \left[\frac{-1}{a-b} \frac{1}{(a-b)x + b} - \frac{-1}{a-c} \frac{1}{(a-c)x + c} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2abc}. \end{aligned}$$

PROBLEM3. 次の積分を計算せよ:

$$I = \int_{B(R)} dx dy dz e^{-x^2-y^2-z^2}.$$

ただし $B(R)$ は原点中心, 半径 R の球.

SOLUTION. 球面極座標へ移ると,

$$I = \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r^2}.$$

θ, φ 積分からは 4π が得られ

$$\begin{aligned} I &= 4\pi \int_0^R dr r^2 e^{-r^2} \\ &= \left[-\frac{r}{2} e^{-r^2} \right]_0^R + \frac{1}{2} \int_0^R dr e^{-r^2} \\ &= -\frac{1}{2} R e^{-R^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erf}(R). \end{aligned}$$

ここで誤差函数

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha dx e^{-x^2},$$

を用いた.

§ 52. 曲面上の積分

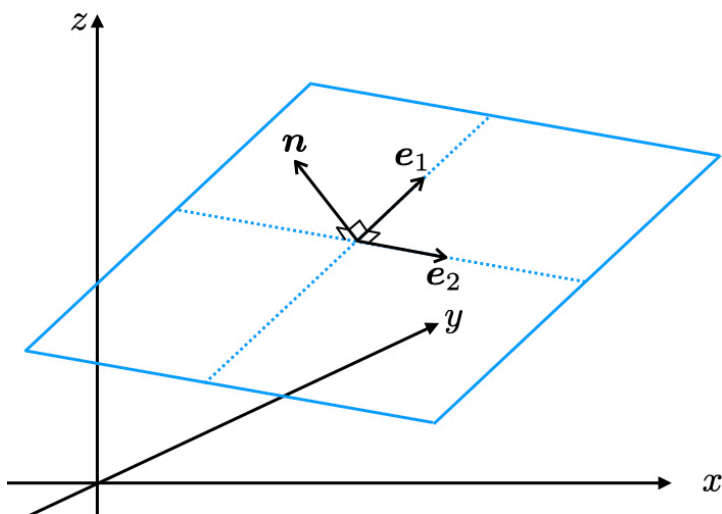


図 96 三次元空間内の二次元平面と基本ベクトル

この節では三次元空間内の二次元曲面上に定義された函数の積分を考えよう．議論の簡単のためまずは三次元空間内の二次元平面 Σ_0 を考え、 Σ_0 上での函数 $f(\mathbf{x})$ の積分を議論しよう．平面は一般に法線ベクトル (normal vector) \mathbf{n} と 1 つの定数 c を用いて方程式

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c \quad (52.1)$$

を満たす点 \mathbf{x} の集合として表すことができる．法線ベクトル \mathbf{n} は大きさ 1 で平面と直交する向きであり、このベクトルによって平面の傾きが定まり定数 c により原点からの距離が定まっている。⁸⁾

三次元空間には 3 つの基本ベクトルが存在する．今この 3 つのうちの 1 つに法線ベクトル \mathbf{n} を選ぼう．そして残り 2 つ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ をこれに直交するように選ぶ:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_a = 0, \quad \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \delta_{ab}, \quad (a, b = 1, 2). \quad (52.2)$$

この $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は平面 Σ_0 内の二次元の基本ベクトルになっている．すなわち Σ_0 内の任意のベクトルはこの 2 つの基底によって $\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2$ と表すことができる．このときたしかに $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = 0$ である．

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に沿って Σ_0 上に座標軸 u, v を設定する．平面 Σ_0 内の任意の二次元領域 D に関しては二次元の体積積分と同様にして D 上における函数 $f(u, v)$ の積分を定義する． D を

$$\int_D du dv f(u, v) = \sum_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M h_u h_v \chi_{Df}, \quad (52.3)$$

⁸⁾ この節では三次元のベクトルだけを太字で表記する．混乱を避けるために二次元のベクトルは必ず (u, v) のように成分で書く．

によって定義できる．ここで χ_D は特性函数であり D を含む長方形領域 L 上の積分に置き換えている． L を座標軸に沿って $N \times M$ 個の小さな長方形に分割しその微小長方形の縦と横の長さが h_u, h_v である．二次元の体積積分と同様に実際の計算では逐次積分の形に帰着させる．

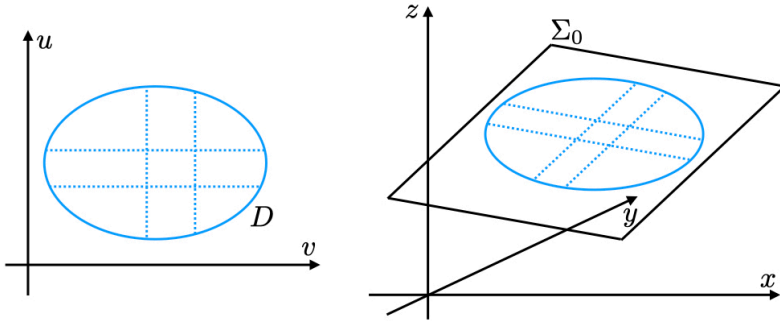


図 97 三次元空間内の二次元平面内に入った二次元の座標 (u, v)

三次元空間には座標 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ が入っている．平面の式 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$ によってそのうち 1 つの自由度が消えて 2 つの座標 (u, v) で Σ_0 が表される．そのため座標の間の関係式 $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ が得られる．位置ベクトルを基本ベクトル \mathbf{n}, \mathbf{e}_a で展開して $\mathbf{x} = x_n \mathbf{n} + x_u \mathbf{e}_1 + x_v \mathbf{e}_2$ と表す．平面上の点は $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$ を満たすことから $x_n = c$ がわかる．よって残りの x_u, x_v が平面の自由度であり座標 (u, v) と同一視できる．つまり平面上の点は

$$\mathbf{x} = c\mathbf{n} + u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2, \tag{52.4}$$

と表せる．これは二次元の平面を三次元で見たときの変換式である．

三次元空間内に定義されたスカラー函数 $F(\mathbf{x})$ の $D \subset \Sigma_0$ 上の積分を

$$\int_D dS F(\mathbf{x}), \tag{52.5}$$

と表記する．ここで dS は D 内の微小面積要素であり，この積分を面積分という． Σ_0 内の微小長方形の頂点を $(u, v), (u + h_u, v), (u, v + h_v), (u + h_u, v + h_v)$ とする．このとき三次元空間から見た長方形の 4 点は

$$\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(u + h_u, v) \\ y(u + h_u, v) \\ z(u + h_u, v) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(u, v + h_v) \\ y(u, v + h_v) \\ z(u, v + h_v) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(u + h_u, v + h_v) \\ y(u + h_u, v + h_v) \\ z(u + h_u, v + h_v) \end{pmatrix}$$

この 4 点を作る長方形の面積は

$$\begin{aligned} & |\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2| \\ &= \left| \begin{pmatrix} x(u + h_u, v) \\ y(u + h_u, v) \\ z(u + h_u, v) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \right| \times \left| \begin{pmatrix} x(u, v + h_v) \\ y(u, v + h_v) \\ z(u, v + h_v) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} \partial_u x \\ \partial_u y \\ \partial_u z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_v x \\ \partial_v y \\ \partial_v z \end{pmatrix} \right| h_u h_v + \mathcal{O}(h_a^3) \end{aligned}$$

したがって三次元空間で見たときの長方形の面積は $|\partial_u \mathbf{x} \times \partial_v \mathbf{x}|$ の因子だけ異なる。そのことを加味して上の積分は平面内の座標で表すと

$$\int_D dS F(\mathbf{x}) = \int_D dudv |\partial_u \mathbf{x} \times \partial_v \mathbf{x}| F(\mathbf{x}(u, v)), \quad (52.6)$$

となる。平面の場合この因子は $|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| = |\mathbf{n}| = 1$ に等しい。

では平面の議論を一般の曲面 Σ に拡張しよう。平面のときと同様に曲面の場合にも二次元の平面の積分に帰着させることを考える。平面の場合でわかったように三次元空間から見た微小面積要素と曲面内から見た微小面積要素を適切に結びつける必要がある。平面と同じように曲面内に座標 (u, v) を入れる。この座標は曲面に沿って入れるので一般に「曲がって」いる。そして変数変換の式 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ が得られたとする。すると長方形の議論を同じように適用すれば $D \subset \Sigma$ 上の積分について

$$\int_D dS F(\mathbf{x}) = \int_D dudv |\partial_u \mathbf{x} \times \partial_v \mathbf{x}| F(\mathbf{x}(u, v)), \quad (52.7)$$

を得ることができる（証明は省略）。変数変換 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ は曲面の場合の媒介変数表示とも言える。線積分が曲線 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ に入ったパラメータ t の積分に書き換えることができたことと対応する：

$$\int_\gamma d\mathbf{l} F(\mathbf{x}) = \int_\gamma dt \frac{d\mathbf{x}}{dt} F(\mathbf{x}(t)). \quad (52.8)$$

線積分のときと同様に面積分の値は平面に入る座標 (u, v) の取り方に依存しない。実際座標 (u, v) から別の座標 (s, t) へ移ると二次元の体積積分の性質から

$$\int_D ds dt \cdot |\det J|^{-1} \cdot |\partial_u \mathbf{x} \times \partial_v \mathbf{x}| F(\mathbf{x}(u(s, t), v(s, t))),$$

とかける。 J は二次の Jacobi 行列で

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix},$$

と定義される。Jacobian の性質を用いた簡単な計算あるいは直接の微分の計算から

$$|\det J|^{-1} \cdot |\partial_u \mathbf{x} \times \partial_v \mathbf{x}| = |\partial_s \mathbf{x} \times \partial_t \mathbf{x}|,$$

がわかり、たしかに面積分は座標の取り方によらない。

一般の二次元空間内の曲面は $\psi(\mathbf{x}) = c$ のように表せる。その勾配 $\nabla\psi$ について調べよう。曲面内の任意の点で ψ は一定なので勾配は曲面に沿った方向に対して 0 である。したがって曲面内の 2 つの基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に対し

$$\mathbf{e}_a \cdot \nabla\psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (52.9)$$

が成り立ち、基本ベクトル \mathbf{e}_a に沿った ψ の方向微分が 0 である。すなわち勾配 $\nabla\psi$ は点 \mathbf{x} における曲面の法線ベクトル \mathbf{n} と平行である：ゆえに $\mathbf{n} = \alpha \nabla\psi$ とおける。

他方でベクトル $\partial_u \mathbf{x}$, $\partial_v \mathbf{x}$ については微分の鎖法則から

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

であるが ψ は (u, v) によらず一定の値を取るからこれら 2 つの量は 0 に等しい. したがって $\mathbf{e}_1 = \beta_1 \partial_u \mathbf{x}$, $\mathbf{e}_2 = \beta_2 \partial_v \mathbf{x}$ とおくことができる (β_1, β_2 は大きさを 1 にするための規格化定数). この 2 つのベクトルは曲面の接ベクトルである. 直交関係から接ベクトルと法線ベクトルは次の関係を満たす:

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \frac{\partial_u \mathbf{x} \times \partial_v \mathbf{x}}{|\partial_u \mathbf{x} \times \partial_v \mathbf{x}|} = \mathbf{n}. \quad (52.10)$$

ベクトル値関数 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ の積分について考えよう. 曲面 D の法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ との内積をとって面積分を

$$\int_D d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F} = \int_D dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (52.11)$$

と定義する. $d\mathbf{S}$ を微小面要素という. 曲面に座標 (u, v) を入れると

$$\begin{aligned} \int_D d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F} &= \int_D dudv |\partial_u \mathbf{x} \times \partial_v \mathbf{x}| \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ &= \int_D dudv (\partial_u \mathbf{x} \times \partial_v \mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (52.12)$$

と書き換えることができる.

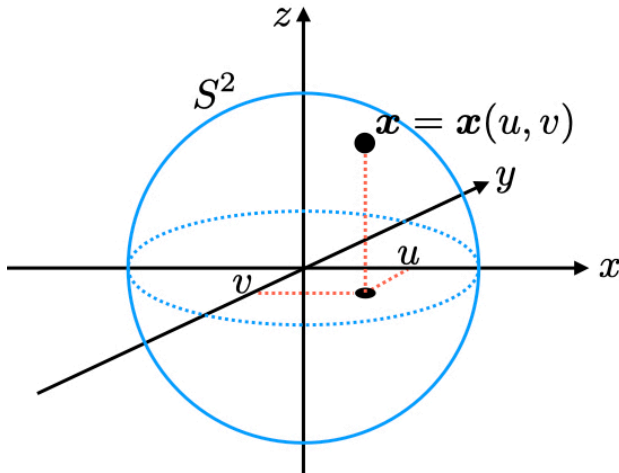


図 98 二次元球面 S^2 の北半球に入った二次元座標

簡単な曲面の例として原点中心, 半径 R の球面 S^2 を考えよう. S^2 は $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ と表される. これを z について解いて北半球と南半球の領域 $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ に分ける. 球面には座標 $u = x, v = y$ を入れることができる. このとき

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mp \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \end{pmatrix}$$

$\psi(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 + z^2$ とすれば

$$\mathbf{n} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \pm\sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix},$$

となる. 外積を計算すれば

$$\partial_u \mathbf{x} \times \partial_v \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \pm\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ \pm\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\partial_u \mathbf{x} \times \partial_v \mathbf{x}| = \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}.$$

定数関数 $f \equiv 1$ の球面上の積分は

$$\begin{aligned} \int_{S^2} dS \cdot 1 &= 2 \times \int_{-R}^{+R} du \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{+\sqrt{R^2 - x^2}} dv \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ &= 2R^2 \int_{-1}^{+1} du' \int_{-\sqrt{1 - u'^2}}^{+\sqrt{1 - u'^2}} dv' \frac{1}{\sqrt{1 - u'^2 - v'^2}} \\ &= 2R^2 \int_{-1}^{+1} du' \int_0^\pi d\theta \cdot 1 \\ &= 4\pi R^2, \end{aligned}$$

となり期待された球の表面積の公式が得られる. 上記の計算の1行目の2倍は北半球と南半球で同じ積分が寄与するためである. 2行目へは変数変換 $u = Ru'$, $v = Rv'$ を行い, 3行目へはさらに $v' = \sqrt{1 - u'^2} \cos \theta$ を行った.

PROBLEMS

PROBLEM2. 次の積分を計算せよ:

$$I = \int_{F_3} dx dy dz \frac{1}{(ax + by + cz)^3}.$$

ただし F_3 は平面 $x + y + z = 1$ と $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ で囲まれた三角錐.

SOLUTION.

§ 53. 立体角

弧度法では半径1の円周を切り取る長さによって角度を定義する. この考え方を拡張すれば三次元における「角度」を定義できる.

半径1の球面を考える. 任意の底面をもつ錐体を考えて, この頂点と球面の中心が重なるようにしたとき, 球面と錐体の交わる部分の面積で**立体角** (solid angle) を定義する. 立体角は無次元量であり単位は**ステラジアン** sr を用いる. 球面の表面積は 4π であるから全立体角は

$$\Omega = 4\pi, \tag{53.1}$$

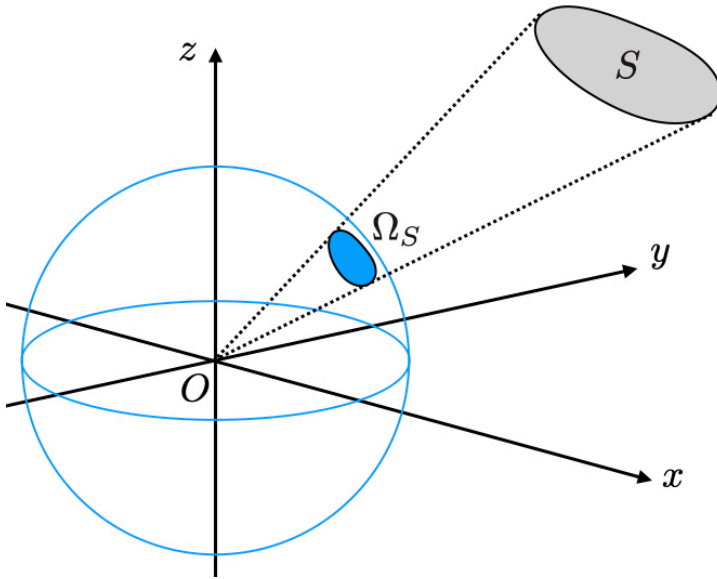


図 99 任意の錐体を球面で切ったときの断面で立体角を定義する.

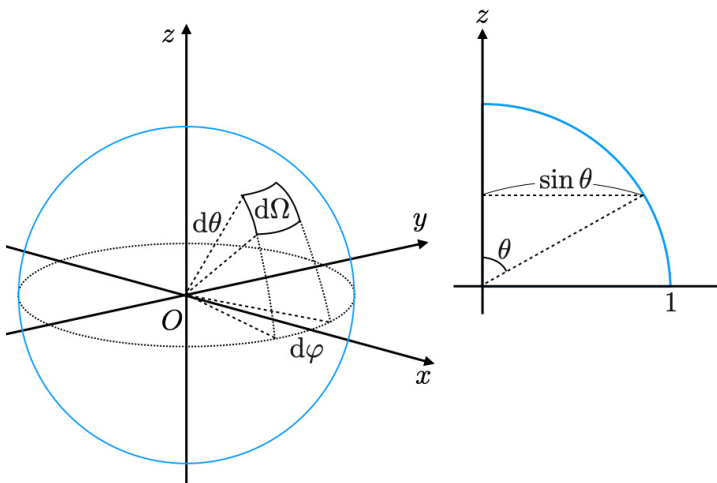


図 100 微小立体角と球面極座標

である.

立体角の計算をするためにも区分求積法を用いる. 球面を経線と緯線で区切って小さな(球面に沿った)長方形に分割する. この長方形の経線方向の長さは $d\theta$ であり, 緯線方向の長さは $\sin \theta d\varphi$ である. したがって微小な長方形の面積は

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi,$$

で与えられる. 任意の錐体の立体角はこれらの総和でかける. 特に $\int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi$

もわかる。立体角は球面極座標で動径座標 r を 1 で固定した座標とも言える。

球面極座標の函数 $f(r, \theta, \varphi)$ について

$$F(r) = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(r, \theta, \varphi), \quad (53.2)$$

とおく。このとき物理量 f は物理量 F の単位立体角あたりの値を表すことになる。そこで記号として

$$\frac{dF}{d\Omega} := f(r, \theta, \varphi), \quad (53.3)$$

と書く。また微小立体角の面要素を $d\Omega$ と略記して

$$F(r) = \int d\Omega \frac{dF}{d\Omega},$$

と書くこともある。

物理量 f が軸対称の場合は z 軸をこの対称軸となるようにとれば φ に依存しないようにできる； $f = f(r, \theta)$ 。このとき φ 積分は 2π を与えるから

$$F(r) = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{dF}{d\Omega}.$$

一方で単位角あたりの量として

$$F(r) = \int_0^\pi d\theta \frac{dF}{d\theta},$$

と表すと 2 つの微係数について

$$\frac{dF}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi \sin \theta} \frac{dF}{d\theta}, \quad (53.4)$$

が成立する。

任意の有界な曲面 S の立体角 Ω_S は、

$$\Omega_S = \int_S d\Omega = \int_S dS \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (53.5)$$

によって計算できる。 \mathbf{r} は微小面要素の位置ベクトル。 \mathbf{r}/r は球面の法線ベクトル（大きさが 1 で曲面に直交する向きを持つベクトル）であり、 \mathbf{n} は曲面の法線ベクトル、 $dS\mathbf{n}$ は曲面の微小面要素である。 $dS\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/r$ は曲面 S 上の微小面要素からその面を通る球面への射影である。 $1/r^2$ はこの球面と半径 1 の球面との相似比である。

(53.5) は原点から見た曲面 S の立体角であるが、任意の点 \mathbf{x} から見た立体角では $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{x}$ に置き換えればよくて

$$\Omega_S(\mathbf{x}) = \int_S dS \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3}, \quad (53.6)$$

積分は変数 \mathbf{r} について実行されることに注意せよ。この観測点 \mathbf{x} が動くとき曲面 S の射影が変化するので、立体角の値も変化する。 \mathbf{x} の微小な変化に対する立体角の変化分を調べよう。ま

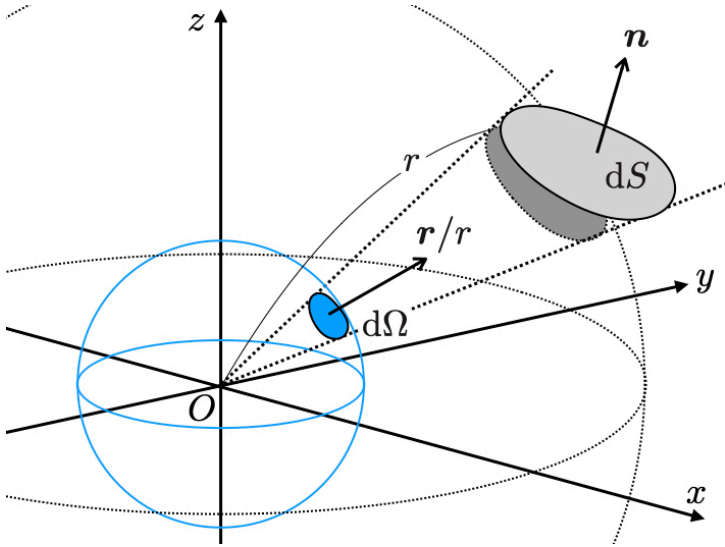


図 101 任意の曲面の立体角の計算

ず直接に立体角の \boldsymbol{x} についての勾配を計算すると

$$\begin{aligned} \nabla \Omega_S(\boldsymbol{x}) &= \int_S dS \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\boldsymbol{n} \cdot \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}|^3} \right) \\ &= \int_S dS \left(-\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}|^3} \boldsymbol{n} + \frac{3\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}|^5} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}) \right), \end{aligned}$$

他方で天下りの的に

$$\nabla_{\boldsymbol{r}} \times \left(\frac{d\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}|^3} \right) = \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}|^3} \right) d\boldsymbol{x} - (d\boldsymbol{x} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}}) \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}|^3},$$

という量を計算してみると (右辺へはベクトル三重積の公式を用いた), $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{x}$ である限り

$$\nabla \Omega_S(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \int_S dS \boldsymbol{n} \cdot \left[\nabla_{\boldsymbol{r}} \times \left(\frac{d\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}|^3} \right) \right], \quad (53.7)$$

が成り立つことがわかる. Stokes の定理により S を囲む曲線 ∂S に沿った線積分に置き換えることができ

$$\nabla \Omega_S(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \oint_{\partial S} d\boldsymbol{l} \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}|^3} \right). \quad (53.8)$$

スカラー三重積の公式を使って積分に関係ない $d\boldsymbol{x}$ を積分の外へ出せば

$$\nabla \Omega_S(\boldsymbol{x}) = \oint_{\partial S} d\boldsymbol{l} \times \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}|^3}, \quad (53.9)$$

が得られる. 有限の座標の移動 $\boldsymbol{x}_P \rightarrow \boldsymbol{x}_Q$ における立体角の変化分は

$$\int_{\boldsymbol{x}_P}^{\boldsymbol{x}_Q} d\boldsymbol{x} \cdot \nabla \Omega_S(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{x}_P}^{\boldsymbol{x}_Q} d\boldsymbol{x} \cdot \oint_{\partial S} d\boldsymbol{l} \times \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}|^3}, \quad (53.10)$$

によって計算できる.

§ 54. 散乱理論

§29 では保存則を用いて 2 体の衝突問題を調べた. その際衝突後の質点の軌道が散乱角 θ に依存するという結果を得た. しかしながらそこでの議論は衝突がどのような相互作用によって起こるのかなどの詳細に言及していない. ここで 2 体間に中心力がはたらくとして衝突の詳細について考えていく. 片方の粒子はもう一方の粒子より十分重く運動は無視できるものとし, 単に中心力場 $V(r)$ を生み出しているものとして扱う. このような固定された粒子を**標的粒子**, 衝突してくる粒子を**入射粒子**という.

中心力場を介して相互作用する二粒子が「衝突」する場合, どれくらい近づいているかが重要となる. この事実が §29 での議論との大きな違いである. このために 2 つの粒子がどれくらいの距離離れたところで相互作用し軌道が変化し飛び去っていくのかを記述しなければならない.

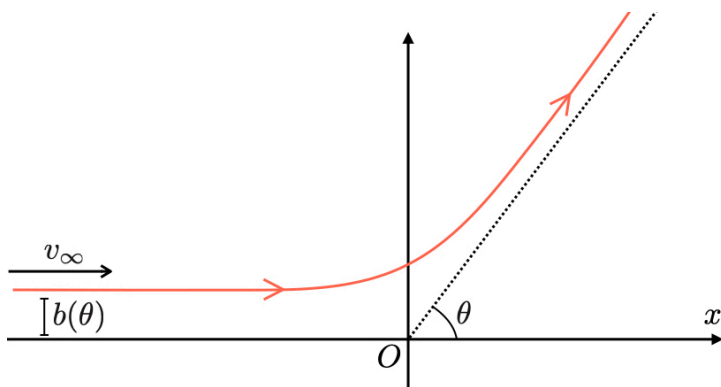


図 102 中心力場と散乱角

中心力場を感じない無限遠から標的粒子のある原点付近に向けて粒子を入射させる. 入射速度を v_∞ とおく. 入射速度の向きと平行に x 軸を設ける. またこの x 軸に垂直な y 軸を設ける. 三次元空間だが, 中心力場にせよ衝突問題にせよ考えるのはこの xy 平面で十分である.

x 軸と無限遠での入射粒子との距離を b とする. b は**衝突パラメータ**と呼ばれる. 無限遠では相互作用を感じないので入射粒子のエネルギーは,

$$E = \frac{m}{2} v_\infty^2, \quad (54.1)$$

である. ただし m は入射粒子の質量. 入射後すぐに粒子は運動方程式,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{dV(r)}{d\mathbf{r}}, \quad (54.2)$$

にしたがって運動する. そうして再び無限遠方へ飛び去っていくが相互作用の影響で入射するときとは異なる方向へ向かうだろう. そこで飛び去っていった無限遠での終端速度の方向

と x 軸（入射の方向）が成す角を**散乱角** θ と定義しよう．§29 では入射速度と終端速度だけに注目していたことになる．

運動方程式は初期条件が与えられれば一意な解を持つので、初速 v_∞ と衝突パラメータ b が同じであれば必ず同じ軌道を描き、同じ終端速度と散乱角を持つだろう．したがって散乱角 θ は b と v_∞ に依存しているといえる．関係式 $b = b(\theta, v_\infty)$ を得ることが新たな問題として興ってくる．

次に散乱角 θ を実験で求まる量と結びつけたい．実験ではサンプル数を増やすために1個の粒子ではなく、たくさんの粒子（光、中性子、ニュートリノなど）を含んだビームを入射させることが多い．こうした実験では入射速度がそろったたくさんの粒子を用意して色々な方向に散乱される様子を観測する．この実験での観測量は方位角⁹⁾ φ 、散乱角 θ における散乱粒子の個数 $dN(\theta, \varphi)$ である¹⁰⁾． $dN(\theta, \varphi)$ を調べることで散乱の角度分布が得られる．そして入射速度をもつ1粒子に替えて、単位時間当たり単位面積を通過する粒子数 j_i を定義する．これは入射粒子流密度とか入射フラックスとよばれる．

無限遠での入射フラックス $j_i = (j_i, 0, 0)$ が原点付近にあるポテンシャル $V(r)$ と相互作用して角度 (θ, φ) へ散乱される．このとき角度 (θ, φ) へ散乱される単位立体角あたりの粒子数を、

$$dN(\theta, \varphi) := j_i \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \quad (54.3)$$

とおく． dN という量は単位時間当たりに、角度 (θ, φ) にある微小面積 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ を通過する粒子数である．それは入射フラックスに比例する（入射量が多ければ dN も多い）ので、 $d\sigma/d\Omega$ という量は入射フラックス依存性を除かれている． $d\sigma/d\Omega$ を**微分散乱断面積** (differential cross section) という．微分散乱断面積は入射フラックスに依存せず、散乱によってどの方向に散乱されやすいかを表す量として粒子数よりも扱いやすい．

ところで散乱が軸対称である限り、散乱角 θ は初速度 v_∞ と衝突パラメータ b が決まれば一意に決まる量である．したがって入射フラックスに対しては、散乱角 θ に散乱される粒子の個数が衝突パラメータ b で入射する粒子の個数と一致していなければならない．これはつまり半径 b と $b + db$ に囲まれたリングを通過して入射する粒子数

$$dN = \int_0^{2\pi} d\varphi j_i \cdot b db = 2\pi j_i b db. \quad (54.4)$$

が、散乱角 θ と $\theta + d\theta$ に囲まれたリングを通過する粒子数に等しい．ただし入射フラックスは軸対称性を仮定した．以上の2式を比較すると、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi b \left| \frac{db}{d\Omega} \right|, \quad (54.5)$$

⁹⁾ ここでの方位角は x 軸と垂直な面へ散乱軌道を射影したときの角度である．散乱角同様、無限遠で測る．

¹⁰⁾ 複数の粒子を考える場合は散乱軌道は単一平面だけを考えることはできない．しかしポテンシャルが球対称な場合などは入射フラックスが軸対称ならば散乱の軌道も軸対称になると予想できるので方位角 φ 依存性は省略できる．

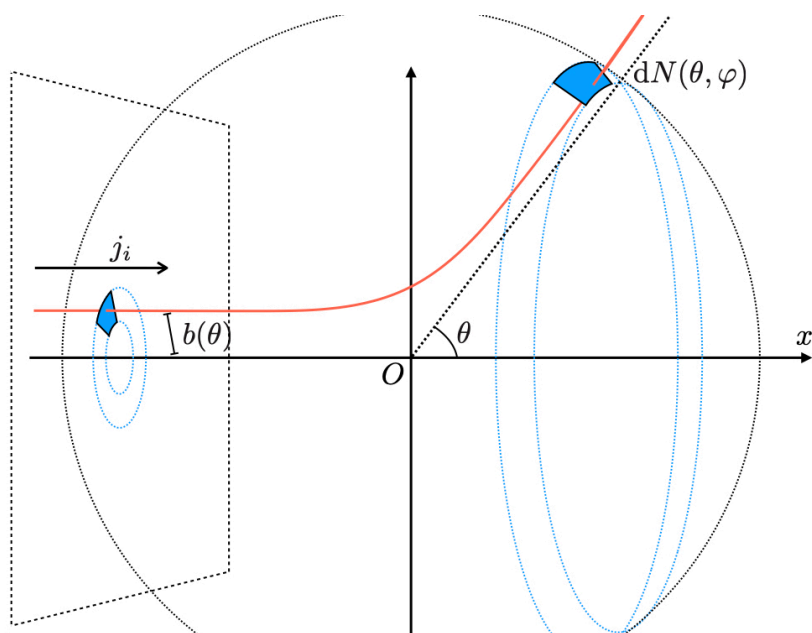


図 103 無限遠の平面から入射し，原点中心の無限遠の球面へ向かって散乱される

が得られる．ただし散乱断面積が正の値を持つように微分の絶対値をとっておく．この式を用いれば衝突パラメータを b を散乱角の関数として与えれば微分散乱断面積が求まることになる．

§ 55. 散乱問題; 剛体球ポテンシャル

剛体球ポテンシャルによる散乱問題を考察しよう．剛体球ポテンシャルは

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r \geq a \\ \infty & r < a \end{cases}, \quad (55.1)$$

で与えられる．たとえば入射粒子より十分重い半径 a の剛体球（硬く変形しない球）が原点においてあり，粒子の衝突による剛体球の運動は無視するような状況を考える．まず粒子の軌道を求めよう．ポテンシャルの到達範囲 a の外では粒子は等速直線運動する．初期条件を無限遠から x 軸方向に速度 v_∞ で入射させるとする．衝突パラメータが $b > a$ の場合は粒子は散乱せず素通りする．

$b \leq a$ の場合は粒子はポテンシャルと相互作用して軌道が変化する．粒子と剛体球は $(-\sqrt{a^2 - b^2}, a)$ の点で衝突する．この点での球面の接平面を設けると中心力場の性質から粒子は接平面と垂直な方向に力を受け，平行な方向には力を受けない．ポテンシャルで書けているので衝突の間エネルギーが保存し反発係数は $e = 1$ ．したがって接平面と粒子の入射速度のなす角を δ とすると，終端速度と接平面がなす角も δ である．

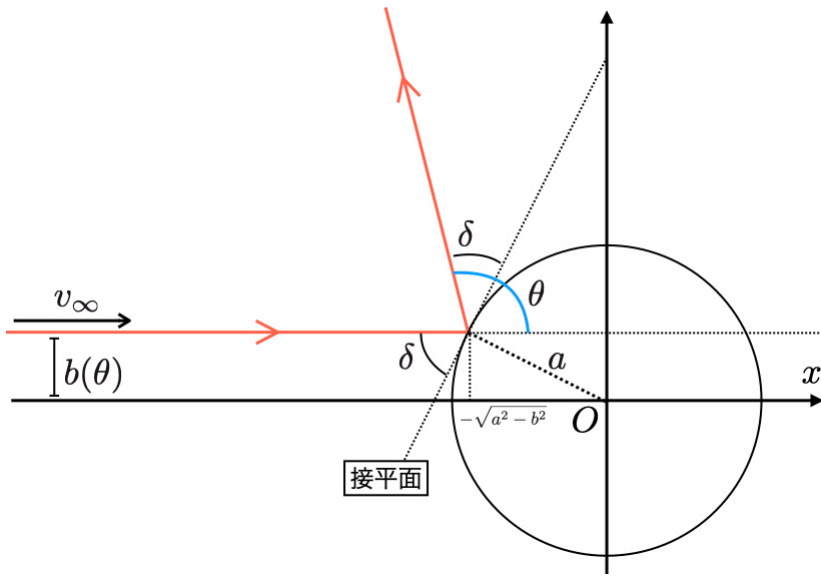


図 104 剛体球ポテンシャルによる散乱

簡単な幾何学から散乱角が $\theta = 2\delta$ であり,

$$\sin \delta = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad \cos \delta = \frac{b}{a}, \quad (55.2)$$

であることがわかる. これらから δ を消去して b を θ で表すと,

$$b = a \cos \frac{\theta}{2}, \quad (55.3)$$

となって所期の衝突パラメータと散乱角の関係式が得られた.

(54.5) へ代入して微分散乱断面積を求め. 衝突パラメータは θ にしか依存していないので $d/d\Omega = (1/2\pi \sin \theta)d/d\theta$ となって,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta}. \quad (55.4)$$

(55.3) を代入して微分を計算すると,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a \cos(\theta/2)}{\sin \theta} \cdot \frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2},$$

であるが三角関数の公式 $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ であることを用いれば,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4}, \quad (55.5)$$

となって, 散乱角 θ や初速 v_∞ には全く依存せず, ポテンシャルの半径にしか依らない. 全散乱断面積は,

$$\sigma = \frac{a^2}{4} \int d\Omega = \pi a^2, \quad (55.6)$$

となる． πa^2 とは半径 a の円の面積である．今の場合この量は粒子がポテンシャルと衝突できる b の範囲に等しい．

§ 56. 散乱問題; Coulomb ポテンシャル

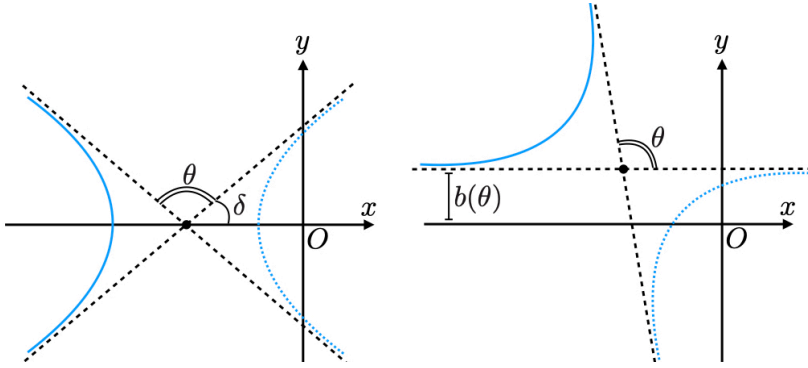


図 105 Coulomb ポテンシャル (斥力) による散乱; 右図のように軌道を回転して観察する．軌道の回転がわかりにくい場合は xy 座標軸の方を回転させてみるとよい．

Coulomb ポテンシャルによる散乱問題を考察しよう．Coulomb ポテンシャル $V(r) = -\alpha/r$ があるときの粒子の軌道は (46.5) より

$$r = \frac{\gamma}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (56.1)$$

ここで,

$$\gamma = \frac{L^2}{m\alpha} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}}, \quad (56.2)$$

であり L は質点の角運動量, m は質量, E はエネルギーである．初期条件を無限遠から速さ v_∞ で入射させると $E = mv_\infty^2/2$ である．散乱問題を考えるので引力 $\alpha > 0$ の場合は $\epsilon > 1$ の双曲線軌道の場合を考える．斥力 $\alpha < 0$ の場合は常に双曲線軌道となる．漸近線は,

$$y = \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1} \left[x - \frac{\gamma\epsilon}{\epsilon^2 - 1} \right], \quad (56.3)$$

であるが, 散乱角 θ はまさにこの 2 つの直線のなす角である．ところがこの漸近線の式というのは双曲線を $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ の形で見たときのものである．§54 の設定では双曲線軌道の片端が無限遠で x 軸と平行になるような平面をとっていた．それゆえに漸近線の式をそのような xy 平面で見たときのものに変換しなければならない．そのためには漸近線の片方の傾きが 0 になるように軌道全体を原点周りに回転させれば良い．ゆえに回転角度を δ とおくと,

$$\tan \delta = \sqrt{\epsilon^2 - 1}, \quad (56.4)$$

が成り立つ。座標変換の式は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

である。新たな $x'y'$ 平面で見た漸近線の式は $\sin \delta = \sqrt{1 - (1/\epsilon^2)}$, $\cos \delta = 1/\epsilon$ などに注意して,

$$y' = -\gamma \cot \delta, \quad (56.5)$$

と求まる。ここでは2つの漸近線のうち傾きが正の方を選んだ。この漸近線はたしかに x 軸と平行で $\gamma \cot \delta$ だけ離れている (斥力ならば x 軸の上側, 引力ならば下側に位置する)。新しい座標系において初期条件を時刻 $t = -\infty$ において $(x'(-\infty), y'(-\infty)) = (-\infty, -b)$ かつ $(v'_x(-\infty), v'_y(-\infty)) = (v_\infty, 0)$ とする。これから,

$$b = \gamma \cot \delta = \frac{L^2}{m\alpha} \cot \delta, \quad (56.6)$$

とわかる。角運動量が保存量なので,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v},$$

が時間によらず一定である。ここで $\mathbf{r} = \mathbf{r}_x + \mathbf{r}_y$ と各座標軸に平行な成分に分解すると, はじめの時刻においては \mathbf{v} が x 軸に平行なので $\mathbf{r}_x \times \mathbf{v} = 0$ でなければならない。したがって,

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}_y \times \mathbf{v} = mv_\infty b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L = mv_\infty b, \quad (56.7)$$

と求まる。一方で回転角 δ と散乱角 θ の関係はグラフから読み取ることができて,

$$\theta = \pi - 2\delta, \quad \delta = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad (56.8)$$

である。三角関数の公式から $\tan[(\pi - \theta)/2] = \cot(\theta/2)$ であることを用いれば,

$$b = \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \cot \frac{\theta}{2}, \quad (56.9)$$

となって所期の衝突パラメータと散乱角の関係式が得られた。

(54.5) へ代入して微分散乱断面積を求めてみよう。衝突パラメータは θ にしか依存していないので $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ となって,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta}. \quad (56.10)$$

(56.9) を代入して微分を計算すると,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

$\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ を用いると結局,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2}, \quad (56.11)$$

という結果が得られる。これは **Rutherford 散乱断面積** と呼ばれる。全散乱断面積は,

$$\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \int d\Omega \sin^{-4} \frac{\theta}{2}.$$

いま Coulomb ポテンシャルのソースは原点に固定している。これはソースの質量 M が非常に大きいため運動が無視できるという近似であった。しかし厳密にははじめ静止していたソースにはいくらかのエネルギーが与えられている。エネルギー保存則から質点が飛び去った無限遠での速さ v_f とソースの速度 V について

$$\frac{1}{2}mv_{\infty}^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV^2,$$

が成り立つ。運動量 $p = mv$ に書き換えて $1/M$ の項を無視すれば

$$\frac{p_{\infty}^2}{2m} = \frac{p_f^2}{2m} + \frac{P^2}{2M} \simeq \frac{p_f^2}{2m},$$

すなわち $p_{\infty} \simeq p_f$ が得られる。一方で全運動量の保存則から

$$\mathbf{p}_{\infty} = \mathbf{p}_f + \mathbf{P},$$

も成り立つ。運動量 \mathbf{p}_{∞} と \mathbf{p}_f がなす角は散乱角 θ であるから内積の性質から

$$P^2 = (\mathbf{p}_{\infty} - \mathbf{p}_f)^2 \simeq 2p_{\infty}^2(1 - \cos \theta),$$

の関係が導かれる。 $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$ を用いて,

$$P^2 = 4p_{\infty}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

この関係を使って Rutherford の公式 (56.11) から散乱角を消去できて

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m\alpha}{P^2} \right)^2, \quad (56.12)$$

を得る。

Geiger と Marsden が行った金原子にアルファ粒子を衝突させる散乱実験の結果に対して、Rutherford(1911) は散乱断面積 (56.11) を用いて理論的説明に成功した。詳細は電磁気学の章に委ねる。

第 5 章 剛体の力学

§ 57. 非慣性系の運動方程式

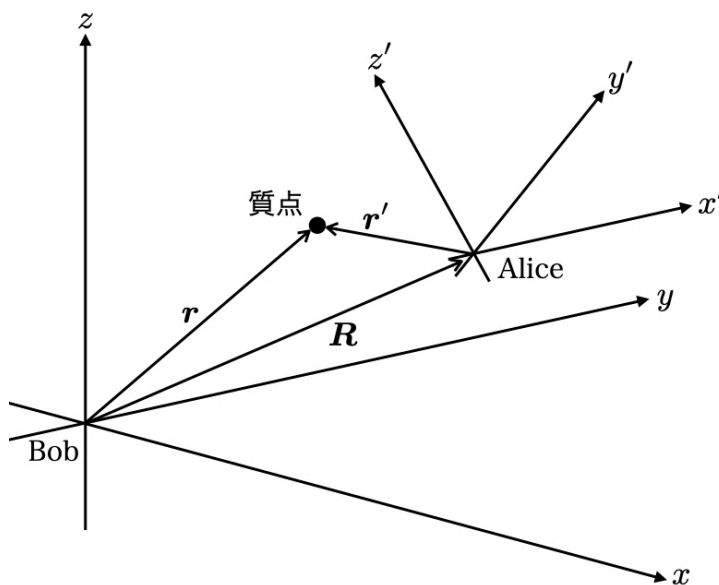


図 106 慣性基準系 Bob と非慣性基準系 Alice

Newton の運動方程式は慣性基準系にいる観測者に基づいていた。慣性基準系から見た位置 \mathbf{r} にある質点の Newton 方程式は (15.1) より、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (57.1)$$

とかける。ここで \mathbf{F} は質点に働く力の合力。慣性基準系の観測者 Bob から見て、別の観測者 Alice は加速度運動したりくるくると回転運動したりしているとする (図 106)。すなわち Alice は Bob に対して非慣性的運動をしている。Alice から質点 \mathbf{r} を観測するとき、運動方程式はどのように書けるだろうか。Alice のような基準系は**非慣性基準系**という。

Bob から見た質点の位置ベクトルは基本ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ を用いて $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ と展開できる。同じように非慣性系の基本ベクトルを $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$ とすると $\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y +$

$z'e'_z$ と展開できる. O の基本ベクトルの向きは時間によらないが, Alice の基本ベクトルの方は非慣性運動に伴って向きを変える. 初めの時刻 $t = 0$ で両組みは一致していたとして, その後の任意の時刻での両組みの間の関係を求めよう.

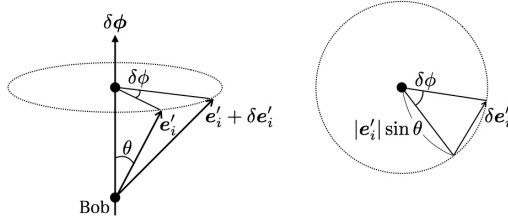


図 107 微小回転ベクトルと基本ベクトルの変位

どんな回転もある軸のまわりの回転で達成できる (Euler の定理). いま微小な時間の間に $\delta\phi$ の方向のまわりに角度 $|\delta\phi| =: \delta\phi$ だけ回転したとする (図 107). すると Alice の基本ベクトル e'_i は $\delta e'_i$ だけ変位する. $\delta\phi$ と e'_i のなす角を θ とすると $\delta e'_i = \delta\phi e'_i \sin\theta = |\delta\phi \times e'_i|$ を満たす. 2つのベクトル $\delta e'_i$ と $e'_i \times \delta\phi$ は向きも同じはずだからこの2つのベクトルは一致して $\delta e'_i = \delta\phi \times e'_i$. あるいは

$$\frac{d}{dt} e'_i = \frac{d\phi}{dt} \times e'_i = \boldsymbol{\omega} \times e'_i. \quad (57.2)$$

$\boldsymbol{\omega}$ は回転軸に平行なベクトルであり**角速度ベクトル**という. Alice から見た質点の位置ベクトルの時間微分は,

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \sum_i \left(\frac{dx'_i}{dt} e'_i + x'_i \frac{d}{dt} e'_i \right) = \sum_i (v'_i e'_i + x'_i \boldsymbol{\omega} \times e'_i).$$

さらにもう一度時間微分すれば,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \sum_i \left(a'_i e'_i + 2v'_i \boldsymbol{\omega} \times e'_i + x'_i \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times e'_i + x'_i \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times e'_i) \right).$$

ここで $\mathbf{a}' = \sum_i a'_i e'_i$, $\mathbf{v}' = \sum_i v'_i e'_i$ はそれぞれ加速度ベクトルと速度ベクトルであるから,

$$\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad (57.3)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \quad (57.4)$$

とまとめられる. Alice から見た加速度ベクトルは位置ベクトルの単なる微分ではなくて, 各成分の2階微分を Alice の基本ベクトルで表示したものであることに注意せよ. Bob から見た質点の位置ベクトル \mathbf{r} と $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}$ の関係で結ばれるとする. \mathbf{R} は Bob から見た Alice の位置ベクトルである. Bob から見た質点の運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ から,

$$\mathbf{F} = m(\ddot{\mathbf{r}}' + \ddot{\mathbf{R}}) = m\ddot{\mathbf{R}} + m\mathbf{a}' + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (57.5)$$

すなわち Alice から見た運動方程式

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \quad (57.6)$$

が得られる。右辺の第 2 項は Alice の並進運動による慣性力であり第 3 項以降は Alice の回転運動からの寄与である。特に第 5 項は Alice の回転による遠心力である。そのことを理解するためにまず $m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = (\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}'$ と変形する。 \mathbf{r}' を $\boldsymbol{\omega}$ に垂直な成分と平行な成分にわけて $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel}$ とすると $(\mathbf{r}'_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}'_{\parallel} + \omega^2 \mathbf{r}'_{\perp}$ 。はじめの 2 項は打ち消しあうことがわかるから結局 $m\omega^2 \mathbf{r}'_{\perp}$ となる。明らかにこの大きさは中心力場のときなどで現れた遠心力と同じである。遠心力は位置ベクトルと回転軸を含む平面にあってかつ回転軸に直交する向きをもつ。

第 3 項は回転軸と速度に直交する向きに働く見かけの力である。この力を **Coriolis 力** という。日常で Coriolis 力はたとえば地球の自転によって現れてくる。地球の赤道側から北極側へ向かうときわれわれは東向きにこの力を感じる。逆に言えば地球上で Coriolis 力の存在を証明することは地球が自転していることの証明になるのである。これを実際に証明して見せたのが Foucault である。詳細は後の節で述べることとする。

そして第 4 項は角加速度と位置ベクトルに直交する向きに働く力である。たいていの場合に角加速度の影響は小さいとして無視することが多い。

§ 58. 地球の Coriolis 力

回転する非慣性系から見た質点の運動方程式は、慣性力項がつけ加わる。その効果は地球上のわれわれも受けているはずである。地球は一定角速度で自転している。地球の回転軸（地軸）の方向に角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_E$ はあり、その大きさは 1 日で 1 周することから、

$$\omega_E = \frac{2\pi}{1 \text{ day}} = \frac{2\pi}{1 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s}} \simeq 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}, \quad (58.1)$$

である。

地上に観測者 Alice をとる。地球の中心（すなわち地球の重心）に静止系をとって、そこから見た Alice の位置ベクトルを \mathbf{R} とする。地球上の質点の位置ベクトルを、静止系から見て \mathbf{r} 、Alice からみて \mathbf{r}' とする（図 108）。このとき常に $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}$ が成り立つ。Alice から見た質点の運動方程式は、

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{F}_C - m\boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}'), \quad (58.2)$$

となる。ここで $\mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{v}'$ は質点に働く Coriolis 力である。

次に $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{R}$ であり、さらにもう一度微分すると $\dot{\boldsymbol{\omega}}_E = \mathbf{0}$ であるから、

$$\ddot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega}_E \times \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{R}),$$

となる。したがって角速度が一定のもとの非慣性系の運動方程式は、

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{R}) + \mathbf{F}_C - m\boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}'), \quad (58.3)$$

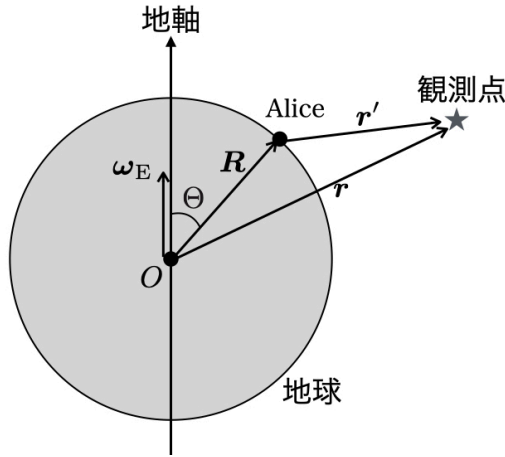


図 108 地球と地上の Alice

となる。

地球上では質点に重力が働く。重力を一様重力 mg とみなしこれ以外に働く力はないとすると、

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{g}_{\text{eff}} + \mathbf{F}_C - m\boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}'), \quad (58.4)$$

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} := \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{R}), \quad (58.5)$$

とかける。 \mathbf{g}_{eff} は有効重力加速度と呼ばれる。

Coriolis 力の存在により、重力による自由落下は直線軌道ではなくなる。今、角速度 $\boldsymbol{\omega}_E$ は非常に小さい値なので $\boldsymbol{\omega}_E$ の 1 次まででこのことを議論しよう。 $\boldsymbol{\omega}_E$ の 1 次までで運動方程式は、

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_C + \mathcal{O}(\omega_E^2), \quad (58.6)$$

となる。 Alice での地球との接平面に沿って x' , y' 軸をとり、これに垂直に z' 軸を設ける。また y' 軸は地軸と交わるように（北極向きに）とる。 z' 軸と角速度ベクトルのなす角を Θ とおくと、

$$\boldsymbol{\omega}_E = \omega_E \sin \Theta \mathbf{e}_{y'} + \omega_E \cos \Theta \mathbf{e}_{z'},$$

と展開できる。 Θ は普段使う緯度 α と $\Theta = \pi/2 - \alpha$ の関係にある。 $\mathbf{e}_{y'}$ たちは $x'y'z'$ 座標系の基本ベクトル。また重力加速度は $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_{z'}$ である。

Coriolis 力は成分をあらわに計算すると、

$$\mathbf{F}_C = -2m\omega_E \left[(v_{z'} \sin \Theta - v_{y'} \cos \Theta) \mathbf{e}_{x'} + v_{x'} \cos \Theta \mathbf{e}_{y'} - v_{x'} \sin \Theta \mathbf{e}_{z'} \right],$$

である。今は ω_E の 1 次までに興味があることに注意して Coriolis 力を評価する。もし Coriolis 力などの慣性力がない場合、これは単なる自由落下なので運動は z' 軸に限られる。運動方程式も $a_{z'} = -g$ のみであり、積分して $v_{z'} = -gt$ が得られる（初期条件 $\mathbf{v}'(t=0) = 0$

を課した). x', y' 方向には動かない. Coriolis 力がある場合でも角速度が小さければその運動への影響も小さいと考えられる. すなわち x', y' 方向の速度は $\mathcal{O}(\omega_E)$ であり, z' 軸方向の速度は $v_{z'} = -gt + \mathcal{O}(\omega_E)$ という形にかけるはずである.¹⁾ すると Coriolis 力は ω_E の 1 次までで,

$$\mathbf{F}_C = 2m\omega_E g t \sin \Theta \mathbf{e}_{x'} + \mathcal{O}(\omega_E^2), \quad (58.7)$$

となる.

ω_E の 1 次までの運動方程式は

$$\begin{aligned} a_{x'} &= 2\omega_E g t \cos \alpha, \\ a_{y'} &= 0, \\ a_{z'} &= -g, \end{aligned} \quad (58.8)$$

となる. ただし $\sin \Theta = \cos \alpha$ を用いた. 質点の初期条件を $\mathbf{r}'(t=0) = (0, 0, h)$, $\mathbf{v}'(t=0) = \mathbf{0}$ として, 運動方程式を解けば,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3}g\omega_E t^3 \cos \alpha, \\ y(t) &= 0, \\ z(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned} \quad (58.9)$$

が得られる. したがって Coriolis 力があるときは質点は東の方向に軌道が曲がっていく. $z(t)$ の式は t について解くことができる. それを $x(t)$ に代入することで軌道の式 $x(z)$ を得ることができる:

$$x(z) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_E \cos \alpha \sqrt{\frac{(h-z)^3}{g}}. \quad (58.10)$$

これは Neil の放物線と呼ばれる.

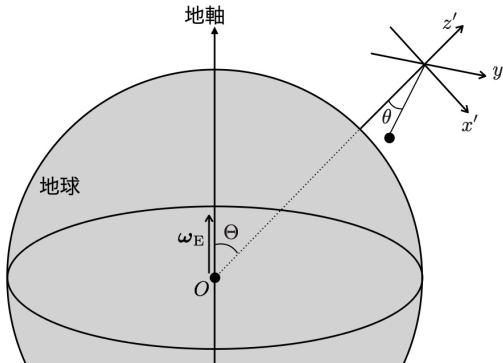


図 109 地球と振り子

¹⁾ これらは自由落下まわりの摂動論と思ってよい. そのとき微小パラメータが ω_E である.

最後に **Foucault の振り子** について紹介する. L. Foucault (1851) はこの振り子を用いて地上にいながらにして地球の自転を証明した. 自由落下のときと同じ座標系を使う. ただし質点は長さ l のひもにつながれている. 振り子の振れ幅はひもの長さ l より十分短いと仮定する (あるいは最大の振れ角 θ_0 が 1 より十分小さいと仮定する). もし Coriolis 力がなければ質点の運動は単振り子であり, そのときの運動方程式は張力を T とすると,

$$\begin{aligned} ma_{x'} &= -T \sin \theta \cos \varphi = -\frac{T}{l} x', \\ ma_{y'} &= -T \sin \theta \sin \varphi = -\frac{T}{l} y', \\ ma_{z'} &= T \cos \theta - mg = \frac{T}{l} z' - mg, \end{aligned}$$

となる. ここで θ は振り子の振れ角, φ は振り子のひもを $x'y'$ 平面に射影したときの影が x' 軸となす角である. 微小振動の場合, $\sin \theta \sim \theta$, $\cos \theta \sim 1$ と近似できることを用いると, $z' \sim l$ より z' 方向の運動は無視できることがわかる. したがって運動方程式から $T \sim mg$ がわかり, 残りの方程式から T を消去できる. ゆえに $\omega = \sqrt{g/l}$ とおいて単振動の運動方程式,

$$a_{x'} = -\omega^2 x', \quad a_{y'} = -\omega^2 y',$$

が得られる.

次に Coriolis 力を考慮に入れよう. 質点の座標を $\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_{x'} + y'\mathbf{e}_{y'} + z'\mathbf{e}_{z'}$ とおくと, Coriolis 力は ω_E の 1 次まで,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= -2m\omega_E (\sin \Theta \mathbf{e}_{y'} + \cos \Theta \mathbf{e}_{z'}) \times (v_{x'} \mathbf{e}_{x'} + v_{y'} \mathbf{e}_{y'}) \\ &= 2m\omega_E \cos \Theta (v_{y'} \mathbf{e}_{x'} - v_{x'} \mathbf{e}_{y'}) + 2m\omega_E \sin \Theta v_{x'} \mathbf{e}_{z'}, \end{aligned}$$

がわかる. z' 方向の振り子の運動は θ の 1 次まででは $z' \sim l$ で静止しているので $v_{z'} \sim 0$ とした. Coriolis 力があるときの運動方程式は,

$$\begin{aligned} ma_{x'} &= -\frac{T}{l} x' + 2m\omega_E \cos \Theta v_{y'}, \\ ma_{y'} &= -\frac{T}{l} y' - 2m\omega_E \cos \Theta v_{x'}, \\ 0 &\sim \frac{T}{l} z' - mg + 2m\omega_E \sin \Theta v_{x'}, \end{aligned}$$

となる. z' 成分から $T \sim mg - 2m\omega_E \sin \Theta v_{x'}$ となり, これを用いて x', y' 成分から T を消去できる. 今, 微小量は ω_E と $\sin \theta \sim \theta$ の 2 つあるので, $\omega_E x'/l \sim \theta \omega_E$ は二次の微量量として無視できる. したがって $\omega = \sqrt{g/l}$ とおいて,

$$\begin{aligned} a_{x'} &= -\omega^2 x' + 2\omega_E \cos \Theta v_{y'}, \\ a_{y'} &= -\omega^2 y' + 2\omega_E \cos \Theta v_{x'}, \end{aligned} \tag{58.11}$$

となる.

では得られた微分方程式を解いていこう。まず 2 つ目の式の両辺に虚数 i をかけて 1 つ目の式と和をとると、

$$\frac{d^2}{dt^2}(x' + iy') = -\omega^2(x' + iy') - 2i\omega_E \cos \Theta \frac{d}{dt}(x' + iy').$$

そこで $\xi := x' + iy'$, $\Omega := \omega_E \cos \Theta$ とおくと、

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2i\Omega \frac{d\xi}{dt} + \omega^2 \xi = 0, \tag{58.12}$$

となるが、この方程式の形は減衰振動の方程式と一致している。したがって (33.7) より一般解は、

$$\xi(t) = c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t}, \tag{58.13}$$

$$\lambda_{\pm} = -i\Omega \pm i\sqrt{\Omega^2 + \omega^2}, \tag{58.14}$$

で与えられる。初期条件を与えれば 2 つの定数 c_1, c_2 が定まる。

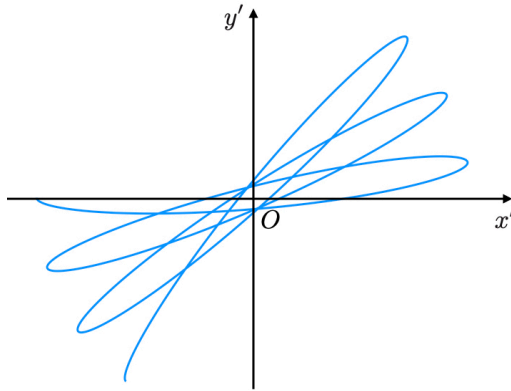


図 110 振り子の振動面の変化

初期条件として $x'(0) = A, y'(0) = 0$ かつ $v_{x'} = v_{y'} = 0$ をとって ξ の実部と虚部を整理すれば

$$\begin{aligned} x(t) &= -A \cos \Omega t \cos \tilde{\omega} t + \frac{\Omega}{\tilde{\omega}} A \sin \Omega t \sin \tilde{\omega} t, \\ y(t) &= -A \sin \Omega t \cos \tilde{\omega} t - \frac{\Omega}{\tilde{\omega}} A \cos \Omega t \sin \tilde{\omega} t, \end{aligned} \tag{58.15}$$

が得られる。ただし

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\Omega^2 + \omega^2} = \sqrt{\frac{g}{l} + \omega_E^2 \cos^2 \Theta}. \tag{58.16}$$

振動数 $\tilde{\omega}$ により x' と y' は通常の振り子のように素早く振動する。ところが Coriolis 力の影響である振動数 Ω で、 x' と y' がずれて振り子の振動面が (約 1 日をかけて) ゆっくりと変化していく。その変化の周期は $T_F = 2\pi/\Omega = 2\pi/(\omega_E \cos \Theta)$ である。ここで定義より

$\omega_E = 2\pi/1\text{day}$ であり, $\cos \Theta = \sin \alpha$ (α は緯度) であることから, Foucault の振り子の振動面の变化の周期は,

$$T_F = \frac{1}{\sin \alpha} \text{ day}, \quad (58.17)$$

である. 日常レベルで用意できる振り子の周期が数秒程度であることと比べると, 非常にゆっくりであることがわかる. この振り子の振動面の周期的な変化は Coriolis 力によってしか, すなわち地球の自転によってしか説明がつかない. したがって周期 T_F を観測し, (58.17) に代入して $T_F \sin \alpha$ が 1 日に一致すれば地球の自転を証明したといえる.

§ 59. 剛体の運動方程式

ここまで質点または質点とみなせるようなものの運動のみ考察してきた. この章では大きさと形をもった一般の物体の運動について考察していくことにしよう. ただこの章では大きさは持つが変形はしないと仮定しておく. 変形しない物体のことを剛体 (rigid body) という. 剛体の運動は質点とどのように違うのであろうか. もっとも大きな違いは回転の自由度が増えることである. 質点にはそれ自体の回転 (自転) の効果は大きさが無いので存在しない.²⁾ 剛体では回転によって生じる, 質点には見られない現象が現れる.

剛体は質点がたくさん集まったものと考えることができる. これは原子のようなものを思い浮かべればよい. 剛体の定義より剛体内の質点どうしは常に一定の距離を保って結合しており, その結合の向きや全体の構造を変えたりしない. 自由な質点の場合は 1 つあたり空間次元と同じだけの自由度を持っていた (現実世界では 3). 剛体内の質点たちは結合の様子を変えないことから自由度は著しく落ちる. ある剛体内の 1 つの質点に注目してみれば, まずその位置を定めるのに自由度が 3 つある. 2 つ目の質点までの距離は決まっているが結合の向きは定めなければならないから自由度は 2 つある. では 3 つ目に注目すると, 1 つ目と 2 つ目の質点からそれぞれ一定距離にあるから, ある円上のどこかに 3 つ目が存在しなければならないことになる. (ただし 1 つ目と 2 つ目の同一直線上にないものを選ぶ) 円周上の自由度は 1 つである. 剛体内の残りの質点は 3 つの質点からの距離がすでに定まっていることから自動的に決まってしまう. 以上から剛体全体の自由度はたった 6 であることが導かれる.

もし剛体が回転していないならば剛体内の 1 つの質点の運動に注目すると他のすべての質点はこれに並行して運動する. そこで注目する質点を剛体の重心にある質点としよう. すると無回転の剛体の運動は重心の運動によって預言することができる. つまり無回転な剛体の運動 (並進運動) の自由度は 3 であり, 剛体の回転の自由度は残りの 3 であるといえる.

剛体を質点の集合といったが原子がなす結晶のように離散的な集合ではなく, 連続的に質量が分布しているとみなす.³⁾ 剛体内の任意の点で質量を定義するということは, 密度分布 $\rho(\mathbf{r})$

²⁾ もちろん公転運動は質点でも意味があることは前章でみてきた.

³⁾ 剛体が十分大きければ原子 1 個 1 個は見えず連続に質量が分布しているとみなせるだろう. ただここで言っているのは理想的な剛体であり現実の固体を扱うわけではないのでひとまずこのような理想極限を考えようということである.

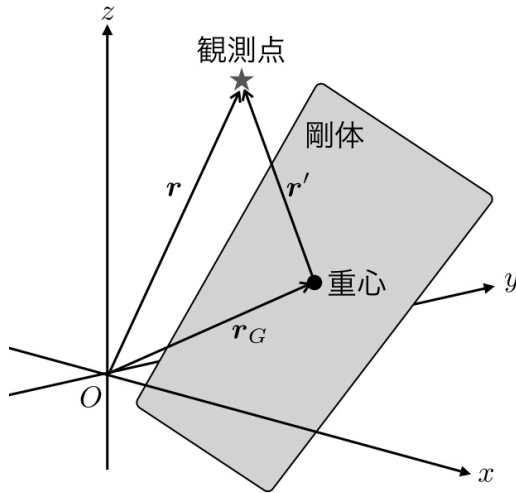


図 111 剛体の重心座標系

を与えることと同じである。密度分布を剛体の全体積で積分すれば剛体の質量 M に等しくなる:

$$M = \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}). \tag{59.1}$$

剛体の重心座標は,

$$\mathbf{r}_G = \frac{\int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \rho(\mathbf{r})}{\int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})} = \frac{1}{M} \int_V d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}). \tag{59.2}$$

単なる質点の集合のときには全質量や重心座標は上のような積分ではなく和で書かれていたことがここでの違いである。そして各質点のしたがう運動方程式ははたらく力を $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ とすれば $\rho(\mathbf{r})\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ である。これを剛体全体で和をとれば,

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} = \int_V d^3\mathbf{r} \mathbf{f}(\mathbf{r}).$$

剛体は変形しないという仮定から、密度は剛体内の質点の軌道に沿って一定でなければならないので $d\rho(\mathbf{r})/dt = 0$ ということを用いた。⁴⁾ したがって剛体のしたがう運動方程式は重心座

⁴⁾ 時間微分は次で定義されている:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_{V'} d^3\mathbf{r}' \rho'(\mathbf{r}') \mathbf{r}' - \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}.$$

ここで $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(t + \delta t)$ は微小時間後の剛体の質点の座標で V' は微小時間後の剛体にわたる積分範囲。 $\rho'(\mathbf{r}')$ は微小時間後の剛体の密度分布で剛体が移動することから元の函数とは別のものとして扱う。しかしながら剛体の変形しないということから剛体内の同じ点における密度は不変である: $\rho'(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r})$ 。そして第 1 項において変数変換 $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}\delta t$ を行って \mathbf{r} に関する積分に変換する。微少量の一次までで積分範囲は V' から V に戻り Jacobian は 1 である。よって

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} = \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}},$$

標だけの運動方程式,

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (59.3)$$

となる。ただし \mathbf{F} は剛体に働く力の総和である。この方程式と初期条件によって剛体の並進運動は完全に決定する。

次に問題となるのは残りの自由度に関する剛体の運動を記述することである。剛体は形もっているためにその向きを予言することも必要である。そこで静止系とは別に剛体に張り付いた座標系を設定する。この座標系は剛体の回転と一緒にクルクルと回転するため、一般に慣性系ではなく非慣性系である。

いま剛体の重心に非慣性系の原点 O' をとろう。そして静止系の位置ベクトル \mathbf{r} と $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_G$ の関係で結ばれるとする。非慣性系から見た任意の質点の運動方程式 (57.6) から、剛体の重心座標を原点とする剛体と一緒に回転する系から見た運動方程式

$$m \mathbf{a}' = \mathbf{F} - m \ddot{\mathbf{r}}_G - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \quad (59.4)$$

が得られる。この運動方程式は非慣性系から見た任意の質点に関するものだから、剛体内の全て点においてこの運動方程式が満たされなければならない。ただし剛体内の任意の点は定義からそれらの間の距離や角度を保たなければならない。それゆえこの非慣性系から見ると剛体内の全ての点は静止しているように見え、 $\mathbf{v}' = 0$ でなければならない。

次に剛体の全運動エネルギーを計算しよう。剛体は並進のエネルギーに加えて回転のエネルギーが加わる。静止系から見るとそれは各点の運動エネルギーの総和で、

$$T = \frac{1}{2} \int_V d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) v^2 = \frac{1}{2} \int_V d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2, \quad (59.5)$$

と与えられる。 $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{r}}_G$ と (57.3), $\mathbf{v}' = 0$ より $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ 。この変数変換によって、

$$T = \frac{1}{2} \int_V d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_G) (\dot{\mathbf{r}}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2,$$

となる。2乗を計算すると $\dot{\mathbf{r}}_G^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_G \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2$ となる。第3項は $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 = \omega^2 r'^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')^2$ である。第2項は $\mathbf{r}' \cdot (\dot{\mathbf{r}}_G \times \boldsymbol{\omega})$ と書き換えられ、後ろの外積は積分の外に出せる。第2項の $\rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_G) \mathbf{r}'$ の積分は重心の定義から0になることがわかる。こうして全運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \frac{1}{2} \int_V d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') (\omega^2 r'^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')^2), \quad (59.6)$$

となる。第1項は重心の並進運動のエネルギーであり、第2項が剛体の重心回りの回転運動のエネルギーを表すことになる。回転運動のエネルギー T_r と記すことにするとこれは、

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{ik} \omega_i \omega_k I_{ik}, \quad (59.7)$$

を得る。剛体では自明に $\nabla \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ も成り立っている。この式は流体力学における非圧縮性条件であり、流体の密度が流れに沿って不変であるための条件である。Jacobian が 1 に等しいことは非圧縮性に起因する。

と書くことができる。ここで I_{ik} は、

$$I_{ik} := \int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') (x'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k), \quad (59.8)$$

と定義される量で**慣性モーメントテンソル**という。慣性モーメントテンソルは剛体の形状や質量分布に依存する。後述するが剛体上の非慣性系 e'_i をうまくとればこのテンソルを対角形にできて $T_r = \sum_i \omega_i^2 I_{ii}$ とできる。このときの座標軸を**慣性主軸**という。 I_{ii} は主軸 i 回りの回転に関する慣性モーメントといえる。つまり剛体が i 軸回りにだけ回転しているときには回転のエネルギーは $\omega_i^2 I_{ii}$ である。

次に剛体の全運動量と全角運動量を求めてみよう。全運動量は、

$$\mathbf{P} = \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} = \int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_G) (\dot{\mathbf{r}}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (59.9)$$

第2項は積分すると消えるので $\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{P}_G$ となる。つまり剛体の全運動量は並進運動に関する運動量のみである。このことは剛体の重心の並進運動を回転に関係なく議論できることを保証している。

全角運動量は、

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \\ &= \int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}') \times (\dot{\mathbf{r}}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (59.10)$$

ここまでの計算と同様にして進めると、

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= M \mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G + \int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_G) \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \mathbf{L}_G + I \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (59.11)$$

となる。ただし $\mathbf{L}_G = M \mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G$ は重心運動に関する角運動量、 $I = (I_{ik})$ であり行列のように扱っている。こうして全角運動量は剛体重心の公転運動に関する部分と、重心回りの自転に関する部分とに分離することができた。では全角運動量の時間微分をとってみよう。すると慣性モーメントテンソルは時間によらないから、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} + I \dot{\boldsymbol{\omega}}. \quad (59.12)$$

一方角運動量の定義と各点の運動方程式 $\rho(\mathbf{r}) \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ から、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \int_V d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (59.13)$$

ここで現れる剛体の単位体積あたりにはたらく力 \mathbf{f} の総和が方程式 (59.3) の合力 \mathbf{F} である。ここで新たな量

$$\mathbf{N} := \int_V d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad (59.14)$$

を定義しよう。これは剛体に働く力のモーメントあるいはトルクという。そしてこの力のモーメントを用いて方程式,

$$\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} + I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{N}, \quad (59.15)$$

が得られる。いま慣性主軸を基本ベクトルに選び、さらに重心の角運動量が保存しているとすると方程式は簡単になって、 $I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{N}$ となる。これが必要だった剛体の回転を記述する運動方程式である。実際この方程式には剛体の形状に依存した慣性モーメントテンソル、回転軸の向きや回転の速さに関する角加速度ベクトル、そしてその回転運動を生じさせる力のモーメントが関与している。力のモーメントは単なる力の情報だけでなくその力が剛体のどのあたりにどういう向きに回転を生じさせるかという情報ももっているのである。

以上で剛体の運動を記述する 6 つの方程式が得られた。それらをもう一度書き下しておく、

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}, \quad I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{N}. \quad (59.16)$$

こうしてみると質量 M と慣性モーメント I 、重心の加速度 $\ddot{\mathbf{r}}_G$ と角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 、そして力 \mathbf{F} と力のモーメント \mathbf{N} が対応していることがわかる。

まだわれわれには静止系と剛体に張り付いた座標系の基本ベクトルの組みの間の関係を見出す問題が残っている。この問題は節を新たにして議論することにしよう。

§ 60. 慣性モーメントの計算

慣性モーメントの簡単な計算例をいくつか見ていこう。ここでの計算は慣性モーメント以外にも電磁場や計算においても有用である。慣性モーメントの定義は (59.8) より、

$$I_{ik} := \rho \int_V d^3\mathbf{r}' (x'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k). \quad (60.1)$$

ただし簡単のために密度 ρ は剛体にわたって一様とした。見やすくするために行列の成分のように書けば、

$$I = \rho \int d^3\mathbf{r}' \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}. \quad (60.2)$$

[球]

最も簡単な場合は球である。半径は R 、全質量 M としておこう。すると密度は $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ となる。もちろん重心は球の中心である。球対称性から慣性主軸は原点が球の中心にある、ふつうの直交座標をとればよい。その上で球面極座標に変数変換すると、

$$I = \rho \int_0^R dr r^4 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \times \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta & -\sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi & -\sin \theta \cos \theta \cos \varphi \\ -\sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \cos \theta \sin \varphi & \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

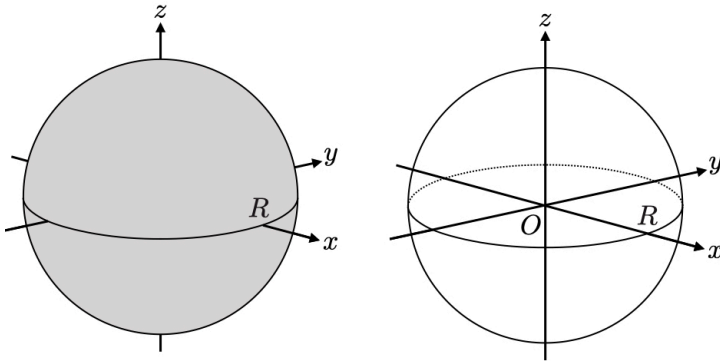


図 112 球, 球面

まず r 積分が簡単に実行できて, $\int dr r^4 = R^5/5$ となる. 次に φ 積分に注目しよう. まず $\sin \varphi$ は 0 から 2π において奇函数なので積分すると 0 になる. 次に $\cos \varphi$ は偶函数だが周期性でやはり落ちる. そして $\sin \varphi \cos \varphi$ もやはり周期性でおちる. 以上によって非対角成分はすべて落ちることがわかる. 残る対角成分の φ 積分は $\sin^2 \varphi$ と $\cos^2 \varphi$ であるがこれはどちらも π を与えることがわかる. ここまでで,

$$I = \frac{\pi \rho R^5}{5} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \times \begin{pmatrix} \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

最後に θ 積分であるが, これらは容易に計算できて対角成分がすべて同じ値になり,

$$I = \frac{8\pi\rho R^5}{15} I_3 = \frac{2}{5} MR^2 I_3, \tag{60.3}$$

となる. I_3 は 3×3 の単位行列である. 慣性モーメントの対角成分 (主値) がすべて等しくなることはどの軸の回りの回転も同等であることを示している. それは球対称性からも明らかである.

[球面]

次に中身の空洞な球, すなわち球面の場合に慣性モーメントを計算してみよう. このとき半径 R のところにだけ質量が集まっているので密度は厳密には面密度というものであり, $\sigma = M/(4\pi R^2)$ となる. 積分するときには r 積分は不要であり $r = R$ とすればよい. あるいは r 積分を 0 から ∞ に拡張してデルタ函数 $\delta(r - R)$ を挟めばよい. またあるいは密度を $\rho = \sigma \delta(r - R)$ と思っても良い. 角度の積分は全く同じだから,

$$I = \frac{8\pi\sigma R^4}{3} I_3 = \frac{2}{3} MR^2 I_3. \tag{60.4}$$

球と同じく球対称性よりどの軸回りの回転も同等である。ただ同じ質量の球よりも慣性モーメントの大きさは大きい。

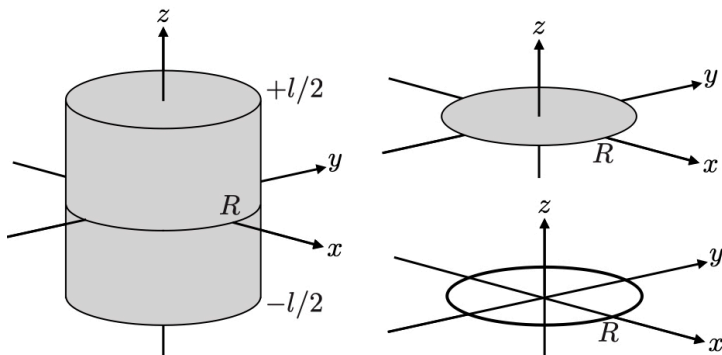


図 113 円柱, 円板, 円環

[円柱]

底面の半径 R 、高さが l で全質量 M の円柱を考えよう。密度は $M/(\pi R^2 l)$ 。円柱の重心は高さ $l/2$ の円の中心にある。そこで円柱の底面に垂直な方向を z 軸とし、底面のある平面に平行に x 軸と y 軸を直交するようにとる。その上で円筒座標に変数変換すると、

$$I = \rho \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-l/2}^{l/2} dz \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta + z^2 & -r^2 \sin \theta \cos \theta & -rz \cos \theta \\ -r^2 \sin \theta \cos \theta & r^2 \cos^2 \theta + z^2 & -rz \sin \theta \\ -rz \cos \theta & -rz \sin \theta & r^2 \end{pmatrix}.$$

三角関数の周期性から非対角成分はすべておちる。 θ 積分を実行してしまうと、

$$I = \pi \rho \int_0^R dr r \int_{-l/2}^{l/2} dz \begin{pmatrix} r^2 + 2z^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 + 2z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2 \end{pmatrix}.$$

あとは簡単な積分計算により、

$$I = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} 3R^2 + l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2 + l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{pmatrix}, \quad (60.5)$$

と求まる。円柱の対称性より x 軸回りと y 軸回りの回転は同等である。その回転は高さと同半径の比に依存している。 z 軸周りの回転は円柱の高さによらない。

円筒（中が空洞な円柱）の慣性モーメントを求めるには r 積分にデルタ関数 $\delta(r - R)$ をはさめばよい。

[円板]

半径 R の円板を考えよう。円板は高さが 0 の円柱と捉えることができる。密度は面密度となって $\sigma = M/(\pi R^2)$ である。また z 積分にはデルタ関数 $\delta(z)$ を挟めば良い (密度 $\rho = \sigma\delta(z)$)。こうしたことから慣性モーメントテンソルは、

$$I = \pi\sigma \int_0^R dr r^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (60.6)$$

この式は単に円柱の慣性モーメント (60.5) において $l = 0$ としたものに一致している。

[円環]

円環, すなわち中の空洞な円板を考えよう。球から球面へ移ったときの論法と同様にして, (60.6) の r 積分に $\delta(r - R)$ を挟む。密度は線密度となり $\sigma = M/(2\pi R)$ である。したがって、

$$I = \pi\sigma R^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{MR^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (60.7)$$

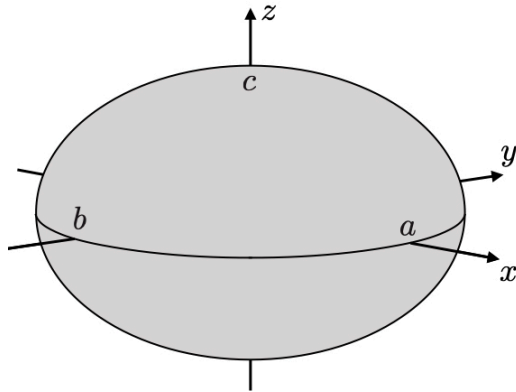


図 114 橢円体

[楕円体]

球が少し変形した楕円体の慣性モーメントを計算しよう。楕円体の式は、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

である。重心は原点であり体積が、

$$\int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy \int_{-c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dz \cdot 1 = \frac{4}{3}\pi abc,$$

より密度は $\rho = 3M/(4\pi abc)$ である。ここで楕円体の式で x を a/R 倍, y を b/R 倍, z を c/R 倍したものは半径 R の球に等しいことに注目しよう。体積もこの変換をすると球の体積

に一致する。したがって慣性モーメントの積分計算においてもこの変数変換を行えば、新しい座標には球面極座標を導入できる。まとめて $x = ar \sin \theta \cos \varphi / R$ などの変換を行えば、

$$I = \frac{abc\rho}{R^5} \int_0^R dr r^4 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \times \begin{pmatrix} b^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \theta & -ab \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi & -ac \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \\ -ab \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi & c^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + a^2 \cos^2 \theta & -bc \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \\ -ac \sin \theta \cos \theta \cos \varphi & -bc \sin \theta \cos \theta \sin \varphi & a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \end{pmatrix}.$$

球のときと同じ議論で非対角成分はすべて0になる。また r 積分が実行できて $R^5/5$ である。あとは対角成分の積分の角度積分が残るがこれらは容易に実行できて、

$$I = \frac{M}{5} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \quad (60.8)$$

球の慣性モーメントと比較すると $2R^2$ がそれぞれの軸での径の2乗和に置き換わっていることがわかる。もちろん $a = b = c$ のときには球の慣性モーメントに一致する。

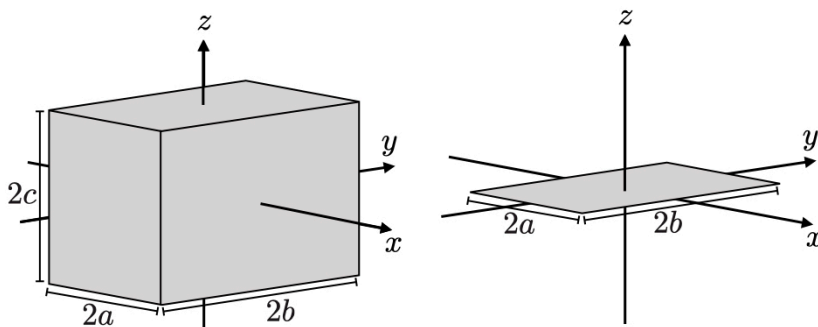


図 115 直方体, 長方形

[直方体]

縦 $2a$, 横 $2b$, 高さ $2c$ の直方体を考えよう。重心は対角線の交わる点でここを原点にとる。 xyz 軸は各辺に平行になるようにとる。密度は $\rho = M/(8abc)$ 慣性モーメントは、

$$I = \rho \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \int_{-c}^c dz \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

非対角成分は奇関数なので0に等しい。対角成分は偶関数なので残って、簡単な計算ののち、

$$I = \frac{M}{3} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}, \quad (60.9)$$

となる。これは楕円体の場合と比べると 5/3 倍になっている。つまり直方体の方が回転させるのに大きなトルクが必要ということになる。

$a = b = c$ のときには立方体になって慣性モーメントは、

$$I = \frac{2}{3}Ma^2I_3, \tag{60.10}$$

となる。

[長方形]

縦 $2a$ 、横 $2b$ の長方形を考えよう。厚さは 0 なので密度は面密度に変えて $\sigma = M/(4ab)$ とする。やはり重心は対角線の交点でここを原点にとる。直方体の慣性モーメントの式で z 軸方向にはデルタ関数 $\delta(z)$ を挟めばよくて (密度 $\rho = \sigma\delta(z)$),

$$I = \frac{M}{3} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}, \tag{60.11}$$

となる。 $a = b$ のときは正方形であり、慣性モーメントは、

$$I = \frac{Ma^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{60.12}$$

これは円板の場合の 4/3 倍になっている。

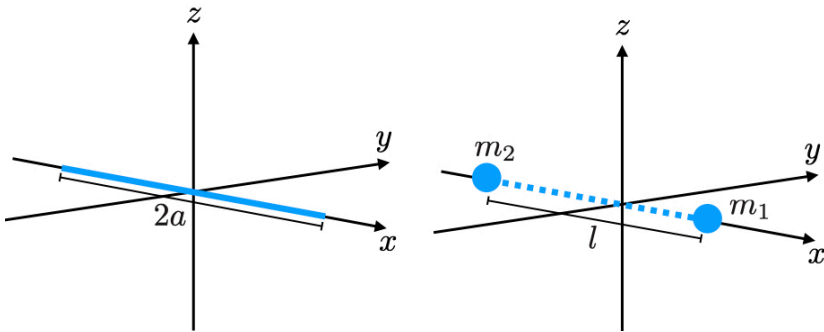


図 116 棒, 二原子分子

[棒]

長さ $2a$ の棒を考えよう。線密度は $\sigma = M/(2a)$ である。重心は中点でありここを原点にとる。 x 軸を棒に平行にとり、他の軸はこれに直交するようにとる。慣性モーメントを求めるには、直方体の慣性モーメントの式でデルタ関数 $\delta(y)\delta(z)$ を挟めばよくて (密度 $\rho = (M/2a)\delta(y)\delta(z)$),

$$I = \frac{Ma^2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{60.13}$$

となる。このとき x 軸周りの回転は存在しない。なぜならば、 x 軸方向から棒をみると大きさがなく回転の自由度がないからである。

[二原子分子]

結合の長さ l が不変な二原子分子を考えよう。2原子は質量 m_1 と m_2 の質点とみなす。これは最も簡単な剛体の例である。2質点の座標を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とすると重心の座標は、

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

である。重心から見た2質点の座標は、

$$\mathbf{r}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

重心を原点にとり2質点が x 軸上にあるように座標系をとりなおすと $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (l, 0, 0)$ である。密度はデルタ函数を用いて $\rho(\mathbf{r}) = m_1 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1) + m_2 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2)$ とかける。慣性モーメントは、

$$I = \int d^3\mathbf{r} \left[m_1 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1) + m_2 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2) \right] \\ \times \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

今原子は x 軸上を仮定しているのでデルタ函数により全ての y, z を含む項は0になる。これにより非対角成分はすべて落ちる。対角成分では x 軸周りの回転の成分だけ0となる。これは棒のときと同じく、この x 軸回転の自由度が存在しないことに対応している。残った成分を計算していくと、

$$I = \mu l^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (60.14)$$

となる。ここで $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ は換算質量。この式は棒の場合とよく似ている。

§ 61. 任意の点の周りの回転運動

前節で導いた剛体の運動方程式は (59.16) より、

$$M \ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}, \quad I \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{N}. \quad (61.1)$$

である。ここで I は剛体の慣性モーメントテンソル、 \mathbf{F}, \mathbf{N} は剛体に働く力と力のモーメント。剛体の運動エネルギーと角運動量は (59.6) と (59.11) より、

$$T = T_G + \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \omega_i \omega_k, \\ \mathbf{L} = \mathbf{L}_G + I \boldsymbol{\omega},$$

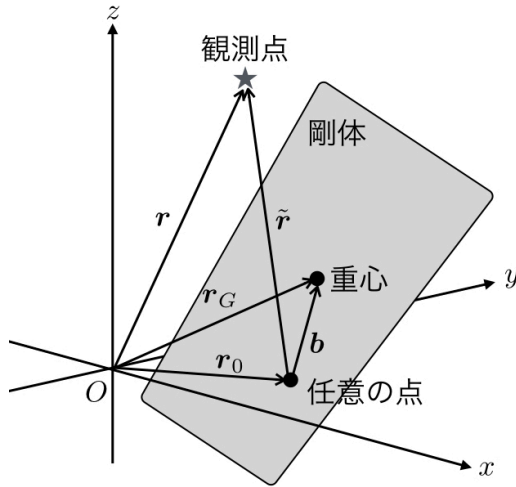


図 117 剛体内の任意の点を原点とする座標系

と定義される．ここで T_G, \mathbf{L}_G は剛体の重心座標の並進運動に関するエネルギーと角運動量．回転運動に関する方程式は重心周りの回転運動を記述するものである．ところが実は回転運動の記述を重心周りに限定する必要はない．前節では対応がよく見えるように重心周りの回転を考えたが，問題によっては重心以外の点周りを考える方が都合が良い場合はある．そこで任意の点の周りの回転運動について考察しよう．今剛体内の任意の点 \mathbf{r}_0 を一つ選んで，剛体内の点を重心座標 \mathbf{r}_G から見たとき位置ベクトル \mathbf{r}' と基準点 \mathbf{r}_0 から見た位置ベクトル $\tilde{\mathbf{r}}$ との関係は，

$$\mathbf{r}' = \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} := \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_G,$$

である．

\mathbf{r}_0 から見た剛体の角運動量は，

$$\tilde{\mathbf{L}} = \int d^3\tilde{\mathbf{r}} \rho(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{r}_0) \tilde{\mathbf{r}} \times \dot{\tilde{\mathbf{r}}}.$$

ただし密度 $\rho(\mathbf{r})$ は静止系で定義されていることに注意せよ．速度ベクトル $\dot{\tilde{\mathbf{r}}} = \dot{\mathbf{r}}' - \dot{\mathbf{b}}$ であり，右辺の 2 つのベクトルは重心 \mathbf{r}_G から見た剛体内の点なので重心回りの角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を用いて $\dot{\tilde{\mathbf{r}}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}' - \mathbf{b})$ ．これらを代入して計算を進めていく；

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}} &= \int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}' - \mathbf{b} + \mathbf{r}_0) (\mathbf{r}' - \mathbf{b}) \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}' - \mathbf{b})) \\ &= \int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_G) [(\mathbf{r}' - \mathbf{b})^2 \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{b})(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_G)] \\ &= \int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_G) [(\mathbf{b}^2 + \mathbf{r}'^2) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}'] \\ &= \int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_G) [\mathbf{r}'^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}' \boldsymbol{\omega}] + M [\mathbf{b}^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}]. \end{aligned}$$

1 行目から 2 行目へはベクトル三重積の公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ を用い, 3 行目へは $\int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_G)\mathbf{r}' = 0$ であることを用い, 最後に 4 行目へは $\int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_G) = M$ であることを用いた. 4 行目の積分に対し, ベクトル三重積の公式を適用して $\mathbf{r}'^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}' \boldsymbol{\omega} = \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}'$ とまとめられる. したがってこの積分は重心 \mathbf{r}_G から見た剛体の全角運動量に等しいことがわかる. よって角運動量の変換式,

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + M[\mathbf{b}^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}], \quad (61.2)$$

が得られた.

次に \mathbf{r}_0 から見た慣性モーメントテンソル \tilde{I}_{ik} を,

$$\tilde{I}_{ik} := \int_V d^3\tilde{\mathbf{r}} \rho(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{r}_0) (\tilde{x}^2 \delta_{ik} - \tilde{x}_i \tilde{x}_k), \quad (61.3)$$

で定義しよう. すると \mathbf{r}_0 から見た剛体の角運動量を $\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}$ と書くことができる. また重心から見ると $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ なので, (61.2) の関係から直ちに慣性モーメントテンソルの変換式,

$$\tilde{I}_{ik} = I_{ik} + M(b^2 \delta_{ik} - b_i b_k), \quad (61.4)$$

が得られる. これは **Steiner の定理**として知られる.

剛体の回転に関する運動方程式 (59.16) は, 角運動量を時間微分することで得られる. $\tilde{\mathbf{L}}$ の時間微分を計算してみよう. まず $\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}$ であり, 慣性モーメントテンソルは時間によらないので, $\dot{\tilde{\mathbf{L}}} = \tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}}$. 次に定義と質点の運動方程式より

$$\frac{d\tilde{\mathbf{L}}}{dt} = \int_V d^3\tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt} (\rho(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{r}_0) \dot{\tilde{\mathbf{r}}}) = \int_V d^3\tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{r}}),$$

となる. よってこれを \mathbf{r}_0 から見た力のモーメント $\tilde{\mathbf{N}}$ とおけば,

$$\tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\mathbf{N}}, \quad (61.5)$$

が得られる.

§ 62. 剛体の力学的平衡

剛体の力学的平衡状態について考察しよう. Newton の運動の法則から一つは剛体に働く全ての力がつりあっている, すなわち合力が 0 でなければならない. すなわち (59.16) において,

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (62.1)$$

が成り立たなければならない. \mathbf{F} は剛体に働く力の総和である. (62.1) は剛体の並進運動が静止または等速直線運動のための条件である. 剛体の回転運動に関しても力学的平衡でなければならないので, 剛体に働く力のモーメントの総和が $\mathbf{0}$ という条件,

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad (62.2)$$

も満たされなければならない。

力のモーメントの定義は $\int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times \mathbf{f}$ であるが、変数変換 $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{b}$ を行うと、

$$\mathbf{N} = \int d^3\tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{f} + \mathbf{b} \times \int d^3\tilde{\mathbf{r}} \mathbf{f},$$

となるが右辺第2項は \mathbf{F} に等しく条件 (62.1) により落ちる。よって力がつり合っているときは力のモーメントの原点をどこに選んでも良い。

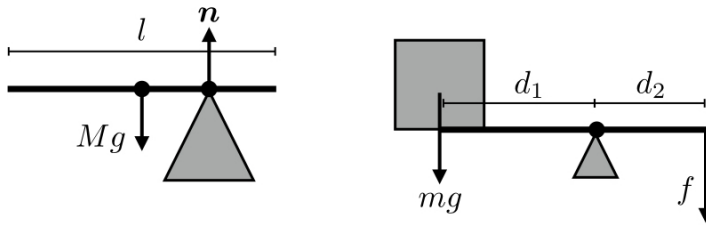


図 118 力学的平衡な剛体の例：支柱の上の棒

いくつか例を見ていこう。質量 M 、長さ l の棒が一点で支えられていて力学的平衡にあるとする。このとき棒に働く力は重力 $-Mge_z$ と支点 (fulcrum) から受ける垂直抗力 \mathbf{n} のみである⁵⁾。(62.1) より、

$$-Mge_z + \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

これからすぐに $|\mathbf{n}| = Mg$ がわかる。では (62.2) からは何がわかるだろうか。原点を支点にとろう。原点から見た棒の重心座標を \mathbf{r}_G とすると力のモーメントは、

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_G \times (-Mge_z) + \mathbf{0} \times \mathbf{n},$$

となる。したがって、 $\mathbf{r}_G = \mathbf{0}$ でなければならず、棒を一点で支えるには支点と重心を一致させなければならないことがわかる (重心は棒の midpoint)。

同じように棒が支柱に乗っている状況を考えよう。ただし支柱の位置は任意とする。そして片方に重さ m の物体を乗せ、もう片方の端に外力 \mathbf{f} を加えて棒を水平に保ったとする。同様に原点を支点にとり、物体の乗っている方の端を \mathbf{d}_1 (作用点)、力を加える方の端を $-\mathbf{d}_2 = l\mathbf{e}_x - \mathbf{d}_1$ (力点) とおく (x 軸を棒と平行にとった)。条件 (62.1) から、

$$-(m+M)ge_z - \mathbf{f} + \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

が成り立ち、垂直抗力が定まる。次に条件 (62.2) から

$$\mathbf{d}_1 \times (-mge_z) + (-\mathbf{d}_2) \times (-\mathbf{f}) + \mathbf{0} \times \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

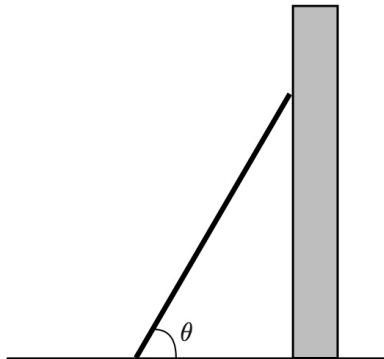
が成り立つ。少し整理すれば、

$$\mathbf{d}_1 \times (mge_z) = \mathbf{d}_2 \times \mathbf{f}, \quad (62.3)$$

⁵⁾ 力のモーメントとの混同を避けるため垂直抗力を小文字の \mathbf{n} とした

という関係が得られる。この式の意味を考えるために、力の方向と棒の向きが垂直であることを用いて外積を計算すると、 $d_1 mg = d_2 |f|$ となる。もし質量 m の物体を支えるときに加える外力 f を小さくしたい場合、 d_2 を大きくすれば良いことがわかる。つまり重たいものを持ち上げたいとき、支点を物体の乗っている作用点側へ近づければ加える外力は小さくて済む。この関係は**この原理** (law of the lever) と呼ばれる。

PROBLEM



PROBLEM1. 壁に立てかけられた棒が力学的平衡にあるための、床に対する棒の角度 θ の条件を求めよ。ただし棒と床の間の静摩擦係数を μ とし、壁との間に摩擦はないとする。

SOLUTION. 棒に働く力を列挙すると、重心に重力 Mg (M は棒の質量)、床からの垂直抗力 N_F 、壁からの垂直抗力 N_W 、床からの静摩擦力 f である。床方向、壁方向の力のつり合いの条件から

$$Mg = N_F, \quad N_W = f,$$

が成り立たなければならない。また力のモーメントのつり合いの条件からは基準点を棒と床の接点にとり棒の長さを l とすると、

$$\frac{l}{2} \cdot Mg \cos \theta - l \cdot N_W \sin \theta = 0.$$

2式から摩擦力 f を θ で表すと $f = Mg \cot \theta / 2$ 。これが最大静摩擦力 $f_m = \mu N_F$ を超えない条件から、

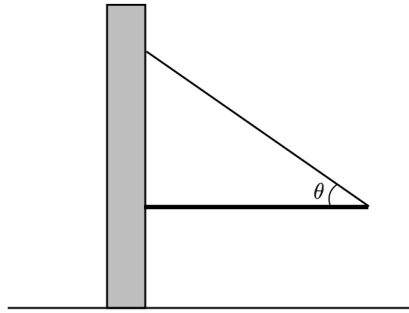
$$\frac{1}{2} \cot \theta \leq \mu,$$

を満たさなければならない。すなわち棒を立てかけるときはなるべく垂直に近くなるようにすべきである。

PROBLEM2. 壁から水平に棒を固定するために棒の一端と壁とにひもを取り付ける。壁と棒の間に摩擦力が働いて力学的平衡となるとき、ひもと棒の角度 θ の条件を求めよ。ただし棒と壁の間の静摩擦係数を μ とする。

SOLUTION. 棒に働く力を列挙すると、重心に重力 Mg (M は棒の質量)、ひもの張力 T 、壁からの垂直抗力 N と静摩擦力 f である。水平方向、垂直方向の力のつり合いの条件から

$$T \cos \theta = N, \quad T \sin \theta + f = Mg,$$



が成り立たなければならない。また力のモーメントのつり合いの条件からは基準点を棒と壁の接点にとり棒の長さを l とすると、

$$\frac{l}{2} \cdot Mg - l \cdot T \sin \theta = 0.$$

2式から張力 T を消去して N, f について解くと $N = Mg \cot \theta/2, f = Mg/2$ となる。よって f が最大静止摩擦力 $f_m = \mu N$ を超えない条件から、

$$\tan \theta \leq \mu,$$

を満たさなければならない。すなわち棒を水平に保つにはなるべくひもも水平に近づけるべきである。

§ 63. 剛体振り子

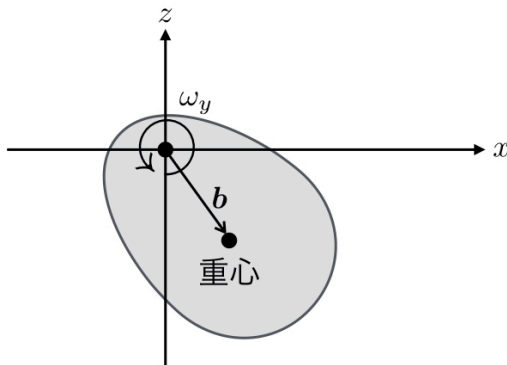


図 119 剛体振り子の概略図

§27 では Newton 力学を用いて質点の振り子運動を議論した。ここでは剛体の一点を固定してその回りに回転できるようにしたものを考える (図 119)。剛体に外力を加えれば振り子のような振動運動をされると考えられる。

原点を固定点にとりそこから見た剛体の重心座標を \mathbf{r}_G とおく。剛体に働く力は重力 $-Mg\mathbf{e}_z$ (M : 剛体の質量) と固定点が支える力 \mathbf{f} の 2 つだけである。力のモーメントは、

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_G \times (-Mg\mathbf{e}_z) + \mathbf{0} \times \mathbf{f}.$$

振り子運動は平面内に限られるとしてそれを xz 平面としよう. すると重心座標も xz 平面内にあるので, 振り子の振れ角を θ とすれば $\mathbf{r}_G = b(-\sin\theta, 0, \cos\theta)$ とおける. よって力のモーメントは $\mathbf{N} = (0, -Mgb\sin\theta, 0)$ となる.

重心で見た慣性モーメントテンソルを I_{ik} とすると, 固定点から見た慣性モーメントテンソルは (61.4) より,

$$\tilde{I}_{ik} = I_{ik} + M(b^2\delta_{ik} - r_{Gi}r_{Gk}),$$

で与えられる. 振り子運動は xz 平面内に限られているので, 興味のある回転は y 軸回りである. y 軸回りの慣性モーメントは,

$$\tilde{I}_{yy} = I_{yy} + Mb^2,$$

と求められる.

以上から回転の運動方程式 (59.16) より y 軸回りについて,

$$(I_{yy} + Mb^2)\dot{\omega}_y = -Mgb\sin\theta, \quad (63.1)$$

が成り立つ. ここで $\dot{\omega}_y = \ddot{\theta}$ である. 少し書き換えて,

$$\ddot{\theta} = -\Omega^2 \sin\theta, \quad \Omega := \sqrt{\frac{Mgb}{I_{yy} + Mb^2}}, \quad (63.2)$$

を得る.

(63.1) において, 両辺に $\dot{\theta}$ をかけて時間で不定積分を実行すると,

$$\frac{1}{2}\tilde{I}_{yy}\dot{\theta}^2 - Mgb\cos\theta = E, \quad (63.3)$$

が得られる. ここで E は時間によらない定数である. 左辺の第1項は回転のエネルギーであり, 第2項は重力の位置エネルギーである. よってこの式は剛体のエネルギー保存則をあらわす. この式を少し変形すると,

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\tilde{I}_{yy}}(Mgb\cos\theta + E)}, \quad (63.4)$$

となるが, これはまさに単振り子の場合と同じ方程式である. 初期条件を $t=0$ で $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ とすると, $E = -Mgb\cos\theta_0$. 単振り子の場合と全く同様の計算から振り子の周期を計算できて,

$$T = 4\sqrt{\frac{\tilde{I}_{yy}}{Mgb}} K\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right), \quad (63.5)$$

を得る. ただし $K(x)$ は第一種完全楕円積分,

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}}.$$

初期振れ角 θ_0 が小さいときは第一種完全楕円積分の Taylor 展開の 1 次までで

$$T \simeq 2\pi \sqrt{\frac{\tilde{I}_{yy}}{Mgb}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{yy} + Mb^2}{Mgb}}, \quad (63.6)$$

となる. 同じ精度で方程式 (63.2) は $\ddot{\theta} \simeq -\Omega^2\theta$ となり, これは単振動の方程式と同じであることがわかる. この方程式から微小振動の周期は $T = 2\pi/\Omega$ であり再び (63.6) を得る.

ひもの長さが l の質点が繋がれた振り子は周期 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ をもっていた. (63.6) と比べれば,

$$b = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{\tilde{I}_{yy}}{M}}, \quad (63.7)$$

を満たすとき剛体振り子の周期と一致する.

例として長さ l , 質量 M の棒振り子の周期を計算して見る. 棒の一端を固定点とする ($b = l/2$). 慣性モーメントは Steiner の定理 (61.4) より,

$$\tilde{I}_{yy} = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2.$$

したがって周期は (63.6) より $T = 2\pi\sqrt{2l/(3g)}$ と求まる.

最後に剛体振り子の応用例として **Kater の可逆振り子** を紹介する. この振り子を用いることで重力加速度 g の値を精密に測定することができる. 質量 m_0 の棒に質量 m_1, m_2 のおもりがついている. m_2 のおもりは棒の一端に固定されていて, m_1 のおもりは棒に沿って動かすことができる. 全質量を $M = m_0 + m_1 + m_2$ とおく. この棒には 2 箇所 A と B のどちらかを振り子の固定点にして揺らすことができる (図 120). 振り子全体 (おもり込み) の重心から A, B までの距離を h_A, h_B とし $L = h_A + h_B$ とおく. A, B を固定点としたときの周期は (63.6) より

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{I + Mh_A^2}{Mgh_A}}, \quad T_B = 2\pi\sqrt{\frac{I + Mh_B^2}{Mgh_B}}.$$

ここで I は振り子の回転軸回りの慣性モーメント.

m_1 のおもりを動かしてその都度振り子の周期 T_A, T_B 両方を測定する. おもりを動かすと振り子の重心位置が移動し h_A, h_B, I , そして周期 T_A, T_B が変化する. その中であるとき $T_A = T_B =: T$ となる瞬間があったとする. そのとき,

$$I = Mh_Ah_B, \quad (63.8)$$

が成り立つ. これを周期の式に代入して整理すると $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ となる. 重力加速度について解けば,

$$g = \frac{4\pi^2L}{T^2} = \frac{4\pi^2(h_A + h_B)}{T^2}. \quad (63.9)$$

よって $T_A = T_B = T$ となるようなおもり m_1 の位置がわかれば, 重力加速度 g を決定できる.

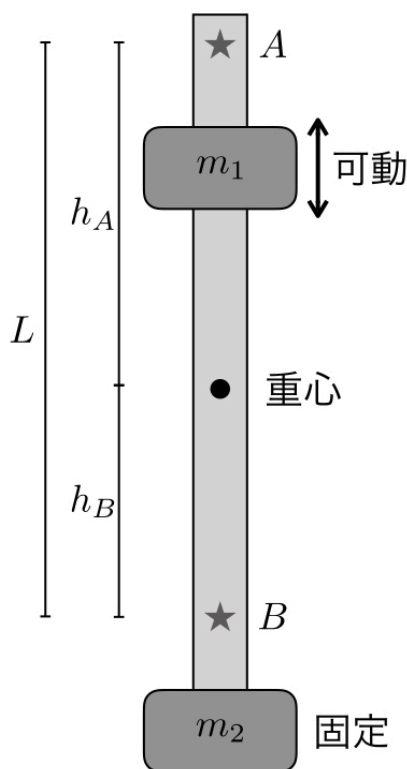


図 120 Kater の可逆振り子の概略図

PROBLEM

PROBLEM1. Borda の振り子：長さ l のひもの一端に半径 R 、質量 M の剛体球をとりつけた振り子を考える。この振り子の周期から重力加速度 g を決定する式を導け。ただしひもは剛体球に比べて十分軽く無視できるとする。

SOLUTION. この振り子の重心は剛体球の中心にあり、振り子の固定点との間の距離は $l + R$ である。Steiner の定理 (61.4) から固定点回りの慣性モーメントは、

$$\tilde{I} = \frac{2}{5}MR^2 + M(l + R)^2.$$

振り子の周期は (63.6) より、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\tilde{I}}{Mg(l + R)}}.$$

これを重力加速度について解くと、

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \left[\frac{2}{5} \left(\frac{R}{L} \right)^2 + 1 \right],$$

となる。ただし $L = l + R$ とおいた。たしかに $R \rightarrow 0$ の極限をとると質点振り子の周期に一致する。

§ 64. 慣性主軸

剛体の慣性モーメントは (59.8) により,

$$I_{ik} := \int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') (x'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k), \quad (64.1)$$

と定義される 2 階のテンソルである. この定義からすぐにわかるように I_{ik} は対称テンソルであり $I_{ik} = I_{ki}$ を満たす. 慣性モーメントを要素とする行列 $I = (I_{ik})$ は対称行列であり直交行列を用いていつでも対角化可能である. 直交行列とはその転置行列と逆行列が一致するような行列のことである; $O^T = O^{-1}$. ある直交行列 O によって慣性モーメント I が対角化されたとして, その対角成分を I_ξ, I_η, I_ζ としよう (後の都合で添え字を ξ, η, ζ にしている). すると対角化は次のように式で書ける:

$$O^T I O = \begin{pmatrix} I_\xi & & \\ & I_\eta & \\ & & I_\zeta \end{pmatrix} =: I_P. \quad (64.2)$$

対角化された慣性モーメント I_P あるいはその成分 I_ξ, I_η, I_ζ を**主慣性モーメント**という. 本節ではギリシア文字の添え字 α, β, \dots は ξ, η, ζ のどれかを表すものとする.

回転のエネルギーは,

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \omega_i \omega_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (O I_P O^T)_{ik} \omega_i \omega_k,$$

となる. 行列の積を成分であらわに書けば, $(O I_P O^T)_{ik} = \sum_{\alpha\beta} O_{i\alpha} (I_P)_{\alpha\beta} O_{\beta k}^T$ である. ここで新たに角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_P$ を $\boldsymbol{\omega}_P := O^T \boldsymbol{\omega}$ で定義すれば,

$$T_r = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_P^T I_P \boldsymbol{\omega}_P, \quad (64.3)$$

となる. ここで $\boldsymbol{\omega}_P^T = \boldsymbol{\omega}^T O$ である. 角速度ベクトルの成分を $\boldsymbol{\omega}_P = (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$ とおけば,

$$T_r = \frac{1}{2} (I_\xi \omega_\xi^2 + I_\eta \omega_\eta^2 + I_\zeta \omega_\zeta^2) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\xi,\eta,\zeta} I_\alpha \omega_\alpha^2, \quad (64.4)$$

とまとめられる.

実は座標系をうまく選ぶことで慣性モーメントを対角形にできる. 直交行列 O によって座標変換 $\boldsymbol{\xi} = O^T \mathbf{r}'$ を行う (直交変換). 新しい座標系の軸を ξ, η, ζ 軸とラベルする. すると (64.1) において, 直交行列の性質 $\det O = 1$ から Jacobian は 1 であり,

$$x'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k = O_{i\alpha} \left[\xi^2 \delta_{\alpha\beta} - \xi_\alpha \xi_\beta \right] O_{\beta k}^T,$$

と変換される. こうして座標変換 $\boldsymbol{\xi} = O^T \mathbf{r}'$ により $I_{ik} = O_{i\alpha} (I_P)_{\alpha\beta} O_{\beta k}^T$ と対角化できた.

ふつう剛体の方程式は慣性モーメントテンソルが対角化されている方が解きやすい. 慣性モーメントテンソルは $\xi\eta\zeta$ 座標系から見ると常に対角化される. よって剛体の重心から見た

非慣性座標系として $\xi\eta\zeta$ 座標系をとることが好ましいだろう。 $\xi\eta\zeta$ 軸を **慣性主軸** という。慣性主軸での基本ベクトルを e_ξ, e_η, e_ζ (あるいは e_α) とする。

非慣性系に慣性主軸をとったときの剛体の運動方程式について見てみよう。重心の並進運動に関してはそのままである。重心回りの回転運動については (59.16) より、

$$I_P \dot{\boldsymbol{\omega}}_P = \mathbf{N}_P, \quad (64.5)$$

となる。ここで $\mathbf{N}_P = N_\xi e_\xi + N_\eta e_\eta + N_\zeta e_\zeta$ は慣性主軸で見たときの力のモーメントである。今慣性主軸は非慣性系なので基本ベクトルも時間に依存する。それゆえ

$$I_P \dot{\boldsymbol{\omega}}_P = \sum_{\beta} I_{\beta} \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_{\beta} e_{\beta}) = \sum_{\beta} [I_{\beta} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\beta} e_{\beta} + I_{\beta} \boldsymbol{\omega}_{\beta} (\boldsymbol{\omega} \times e_{\beta})],$$

となる。 e_{α} との内積をとることで α 成分に関する運動方程式を取り出すと、

$$I_{\alpha} \dot{\omega}_{\alpha} + \sum_{\beta} I_{\beta} \boldsymbol{\omega}_{\beta} (\boldsymbol{\omega} \times e_{\beta}) \cdot e_{\alpha} = N_{\alpha}.$$

第2項の計算を続けると、

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} I_{\beta} \boldsymbol{\omega}_{\beta} (\boldsymbol{\omega} \times e_{\beta}) \cdot e_{\alpha} &= \sum_{\beta, \gamma} I_{\beta} \boldsymbol{\omega}_{\beta} \omega_{\gamma} (e_{\gamma} \times e_{\beta}) \cdot e_{\alpha} \\ &= \sum_{\beta, \gamma, \delta} I_{\beta} \boldsymbol{\omega}_{\beta} \omega_{\gamma} \epsilon_{\gamma\beta\delta} e_{\delta} \cdot e_{\alpha} \\ &= \sum_{\beta, \gamma} \epsilon_{\gamma\beta\alpha} I_{\beta} \boldsymbol{\omega}_{\beta} \omega_{\gamma} \end{aligned}$$

となる。1行目は $\boldsymbol{\omega} = \sum_{\gamma} \omega_{\gamma} e_{\gamma}$ と展開し、2・3行目へは基本ベクトルの性質 $e_{\alpha} \times e_{\beta} = \sum_{\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma}$, $e_{\alpha} \cdot e_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ であることを用いた。運動方程式の各成分をあらわに書き下すと、

$$\begin{aligned} I_{\xi} \dot{\omega}_{\xi} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{\eta} \omega_{\zeta} &= N_{\xi}, \\ I_{\eta} \dot{\omega}_{\eta} + (I_{\xi} - I_{\zeta}) \omega_{\zeta} \omega_{\xi} &= N_{\eta}, \\ I_{\zeta} \dot{\omega}_{\zeta} + (I_{\eta} - I_{\xi}) \omega_{\xi} \omega_{\eta} &= N_{\zeta}. \end{aligned} \quad (64.6)$$

これらは慣性モーメントテンソルが対角化される非慣性座標系から見たときの剛体の回転運動を記述する方程式である。(64.6)を剛体の **Euler 方程式** という。

(64.6)を解けば $\xi\eta\zeta$ 座標系から見た剛体の回転運動がわかる。 $\xi\eta\zeta$ 座標系では計算は簡単になるが、しかしながら実際の軌道を知りたいのは元の慣性基準系である。したがって次なる課題は慣性基準系と慣性主軸の基本ベクトルの間の関係式を得ることである。

§ 65. Euler 角

この節では慣性基準系の基本ベクトル e_i ($i = x, y, z$) と剛体とともに回転する慣性主軸の基本ベクトル e_{α} ($\alpha = \xi, \eta, \zeta$) の間の関係式を導く。これが求めれば剛体の運動の記述に必要な道具が揃うことになる。

両座標系の原点を剛体の重心にとる．また慣性基準系の位置ベクトルを $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$ と表す．2つの基本ベクトルは各時刻である直交変換 O によって結びついてはいるはずである： $\mathbf{e}_i = \sum_\alpha O_{i\alpha} \mathbf{e}_\alpha$ ．ベクトルは基本ベクトルを取り替えても成分が変わるがそれ自身は不変である．したがって、

$$\mathbf{r} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i,\alpha} x_i O_{i\alpha} \mathbf{e}_\alpha = \sum_\alpha \xi_\alpha \mathbf{e}_\alpha.$$

ここで $\xi_\alpha = \sum_i x_i O_{i\alpha}$ である．よって慣性主軸から見た位置ベクトルは $\mathbf{r} = \sum_\alpha \xi_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ と書くことができる．

直交行列のすべての成分を得ることができれば2つの座標系間の関係式を得たことになる．そこで直交行列についてより考察を深めておこう．直交行列とは $O^T = O^{-1}$ を満たす行列として定義した．逆行列の性質からこの定義は $OO^T = I_3$ (I_3 は 3×3 の単位行列) と書き換えられる．任意のベクトル \mathbf{a} の大きさは $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\sum_i a_i a_i}$ で定義されている．ベクトル \mathbf{a} に直交変換を施して成分が $a'_i = \sum_j O_{ij} a_j$ と変換すると、ベクトルの大きさは $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}' = (O\mathbf{a})^T O\mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ となって不変である．すなわち直交変換は「ベクトルの大きさを保つ変換」と言える．これはさらに「ベクトルの回転変換」と言い換えられる。⁶⁾

したがって「剛体の回転に合わせて xyz 直交座標系を回転して $\xi\eta\zeta$ 座標系を得る」ことと「慣性主軸となるように慣性モーメントを直交行列で対角化する」ことは等価である．

一般に n 次元の回転行列は独立な成分が $n(n-1)/2$ 個あり、3次元では3つある．回転変換は回転角で特徴付けられるので、3つの回転角を決めれば回転行列 O は完全に定まり、2つの座標系間の関係も定まる．ここから3回の回転を経て基本ベクトルを xyz 座標系から $\xi\eta\zeta$ 座標系へ移していこう．

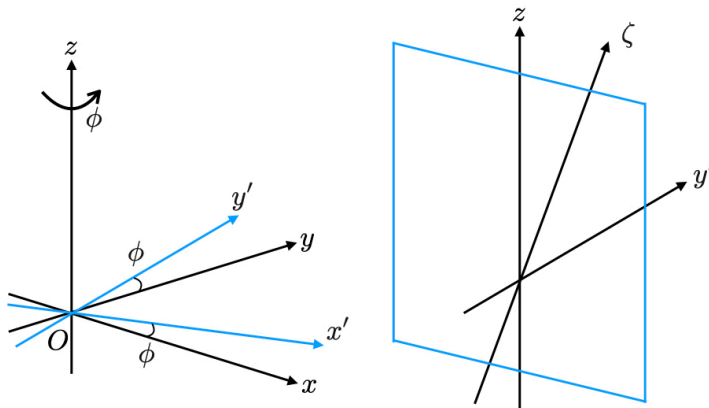


図 121 z 軸回りに角度 ϕ の回転

⁶⁾ ここでは深くは考えないが、厳密には「ベクトルの大きさを保つ変換」と「ベクトルの回転変換」は同じではない．たとえば座標軸のうち1つを反転させるような変換は明らかにベクトルの大きさを保つが回転ではない．回転変換であるためにはさらに $\det O = 1$ を満たさなければならない．

まず z 軸回りに角度 ϕ だけ回転させ、回転後を $x'y'z$ 軸とする。この回転によって z 軸と ζ 軸が含まれる平面と y' 軸が垂直になるようにする。式で書けば、

$$\begin{pmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}, \quad (65.1)$$

となる。

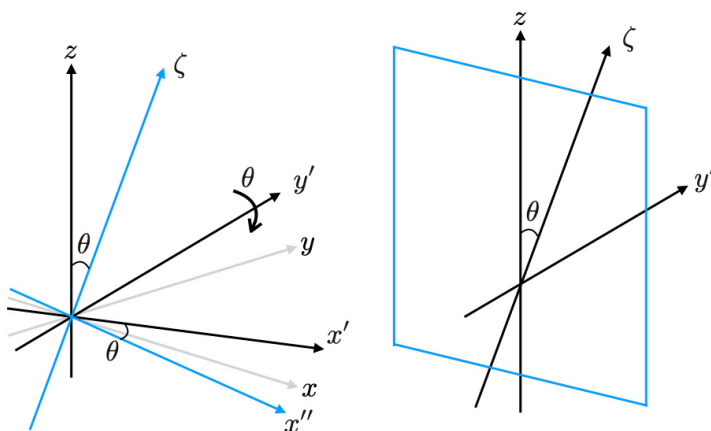


図 122 y' 軸回りに角度 θ の回転

次に y' 軸回りに角度 θ だけ回転させ、回転後を $x''y'\zeta$ とする。つまりこの回転によって z 軸を ζ に移す。式で書けば、

$$\begin{pmatrix} e_{x''} \\ e_{y'} \\ e_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_z \end{pmatrix}, \quad (65.2)$$

となる。

最後に ζ 軸回りに角度 ψ だけ回転させ、回転後を $\xi\eta\zeta$ とする。式で書けば、

$$\begin{pmatrix} e_\xi \\ e_\eta \\ e_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{x''} \\ e_{y'} \\ e_\zeta \end{pmatrix}, \quad (65.3)$$

となる。

以上の3つの回転を続けて行えば、

$$\begin{pmatrix} e_\xi \\ e_\eta \\ e_\zeta \end{pmatrix} = O(\psi, \theta, \phi) \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}, \quad (65.4)$$

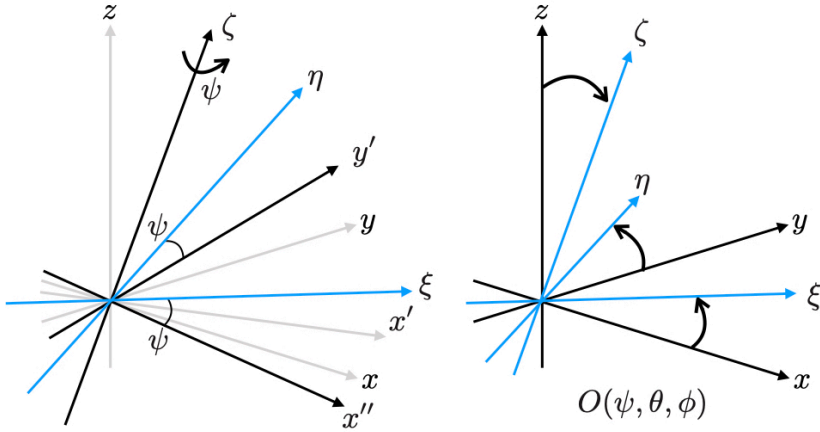


図 123 ζ 軸回りに角度 ψ の回転

ここで,

$$O(\psi, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta \cos \phi - \sin \psi \sin \phi & \cos \psi \cos \theta \sin \phi + \sin \psi \cos \phi & -\cos \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & -\sin \psi \cos \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix}, \tag{65.5}$$

である。回転行列の積も回転行列なのでこの行列も $O^T = O^{-1}$ を満たす。回転行列 O を特徴付ける 3 つの回転パラメータ ψ, θ, ϕ を **Euler 角** という。

剛体の回転は回転行列 O で表されたので、剛体の角速度ベクトル ω は Euler 角で表すことができる。 ϕ は z 軸回りの回転なので角速度 $\dot{\phi}$ は e_z 方向を向いている。 θ は y' 軸回りで、この軸は z 軸と ζ 軸を含む平面に垂直である。 よって $\dot{\theta}$ は $e_z \times e_\zeta$ に平行な方向を向いている。最後に ψ は ζ 軸回りで、 e_ζ 方向を向いている。 これらから角速度ベクトルは、

$$\omega = \dot{\psi} e_\zeta + \dot{\theta} \frac{e_z \times e_\zeta}{|e_z \times e_\zeta|} + \dot{\phi} e_z, \tag{65.6}$$

と展開できる。 $\dot{\theta}$ の係数 $|e_z \times e_\zeta|^{-1}$ は基本ベクトルの規格化のためについている。

(65.4) より、 $e_z = \sum_\alpha (O^T)_{z\alpha} e_\alpha$ なので、

$$e_z = -\cos \psi \sin \theta e_\xi + \sin \psi \sin \theta e_\eta + \cos \theta e_\zeta. \tag{65.7}$$

さらに基本ベクトルの性質 $e_\alpha \times e_\beta = \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma$ を用いて、

$$e_z \times e_\zeta = \sin \psi \sin \theta e_\xi + \cos \psi \sin \theta e_\eta, \tag{65.8}$$

であり、その大きさは $|e_z \times e_\zeta| = \sin \theta$ である。以上から ω を慣性主軸の基本ベクトル e_α で展開することができて、

$$\omega = (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta) e_\xi + (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta) e_\eta + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) e_\zeta, \tag{65.9}$$

を得る.

角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \sum_{\gamma} \omega_{\gamma} \mathbf{e}_{\gamma}$ と (65.9) を比較する. すると簡単な計算の後, Euler 方程式 (64.6) に現れる慣性主軸における角速度 ω_{α} と Euler 角 ψ, θ, ϕ は,

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{1}{\sin \theta} \left(-\omega_{\xi} \cos \psi + \omega_{\eta} \sin \psi \right), \\ \dot{\theta} &= \omega_{\xi} \sin \psi + \omega_{\eta} \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= \omega_{\zeta} + \cot \theta \left(\omega_{\xi} \cos \psi - \omega_{\eta} \sin \psi \right),\end{aligned}\tag{65.10}$$

という関係で結ばれていることがわかる.

以上により, 剛体の問題に対する一般的な解法を得ることができた. まとめておくと, まず慣性主軸において慣性モーメントテンソルを計算する. 得られた慣性モーメントに対して Euler 方程式 (64.6) を解いて ω_{α} を定める. 次に定まった ω_{α} に対して (65.10) を解いて Euler 角 ψ, θ, ϕ を定める. Euler 角が定まれば, 慣性主軸と慣性基準系の基本ベクトルの間の変換行列 $O(\psi, \theta, \phi)$ が定まり, これによって慣性基準系から見た剛体の時間発展を得ることができる.

§ 66. 剛体の自由運動

Newton 方程式では力学的平衡な質点の運動は静止または等速直線運動となる (慣性の法則). 剛体の場合には一般にどのような運動が見られるのだろうか. 剛体の力学的平衡条件は (62.1) と (62.2) より,

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{0},\tag{66.1}$$

である. それゆえ剛体の重心の運動は静止または等速直線運動することがただちにわかる.

次に重心回りの回転運動について見ていこう. 慣性主軸 $\xi\eta\zeta$ をとり, そこから見た Euler 方程式は (64.6) から,

$$\begin{aligned}I_{\xi} \dot{\omega}_{\xi} + (I_{\zeta} - I_{\eta}) \omega_{\eta} \omega_{\zeta} &= 0, \\ I_{\eta} \dot{\omega}_{\eta} + (I_{\xi} - I_{\zeta}) \omega_{\zeta} \omega_{\xi} &= 0, \\ I_{\zeta} \dot{\omega}_{\zeta} + (I_{\eta} - I_{\xi}) \omega_{\xi} \omega_{\eta} &= 0,\end{aligned}\tag{66.2}$$

となる. 3つの方程式を一般に解析することは困難なので, 慣性モーメントが特別な場合に注目して議論する.

1つ目の例として主慣性モーメントが軸対称, $I_{\xi} = I_{\eta}$ の場合を考える. このような剛体を **対称コマ** (symmetric top), あるいは Lagrange コマとよぶ. このとき Euler 方程式の ζ 成分は $I_{\zeta} \dot{\omega}_{\zeta} = 0$ となるので, $I_{\zeta} \neq 0$ ならば, $\omega_{\zeta} = \text{const.}$ である. 残りの方程式は,

$$\dot{\omega}_{\xi} = +\Omega \omega_{\eta}, \quad \dot{\omega}_{\eta} = -\Omega \omega_{\xi}.$$

となる. ここで,

$$\Omega := \frac{I_{\xi} - I_{\zeta}}{I_{\xi}} \omega_{\zeta},\tag{66.3}$$

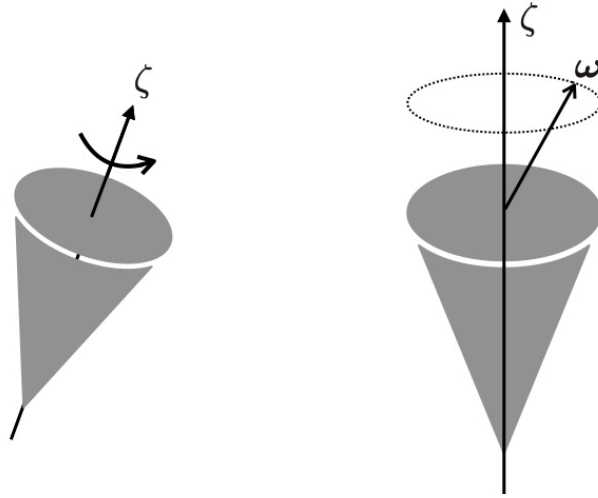


図 124 対称コマの自由運動；角速度ベクトルが円を描くように時間発展する。

とおいた。1つ目の方程式の両辺をもう一度時間微分して、2つ目の方程式を代入して $\dot{\omega}_\eta$ を消去すれば、 ω_ξ に関する方程式、

$$\ddot{\omega}_\xi = -\Omega^2 \omega_\xi,$$

を得ることができる。この方程式は角振動数 Ω 、周期 $T = 2\pi/\Omega$ の単振動を表す。一般解は (32.7) より $\omega_\xi(t) = A \cos(\Omega t - \delta)$ となる。この一般解を1つ目の方程式に代入することで $\omega_\eta(t) = -A \sin(\Omega t - \delta)$ もわかる。以上から対称コマの角速度ベクトルは ζ 軸方向には一定で、 $\xi\eta$ 平面内を円運動することがわかった。このような角速度ベクトルのふるまいは**歳差運動** (precession) とよばれる。角運動量ベクトルは $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ なので同様に歳差運動する。ただし一般に $\boldsymbol{\omega}$ と \mathbf{L} は平行ではないことに注意せよ。

2つ目の例として1つの慣性主軸周りにだけ回転する場合を考えよう。このとき他の軸まわりの回転については小さい影響だけ考慮する。主慣性モーメントの大小関係を $I_\zeta > I_\eta > I_\xi$ としても一般性を失わない。方程式 (66.2) を3つの軸それぞれで回転する場合について議論する。まず ξ 軸周りの回転 $|\omega_\xi| \gg |\omega_\eta|, |\omega_\zeta|$ を考える。すると1つ目の方程式から $\dot{\omega}_\xi \simeq 0$ が成り立ち、ゆえに ω_ξ は定数とみなせる。残りの方程式は、

$$\ddot{\omega}_\eta = -\Omega'^2 \omega_\eta, \quad \ddot{\omega}_\zeta = -\Omega'^2 \omega_\zeta,$$

$$\Omega' := \sqrt{\frac{(I_\zeta - I_\xi)(I_\eta - I_\xi)}{I_\eta I_\zeta}} \omega_\xi,$$

となり、 $\omega_\eta, \omega_\zeta$ は単振動する。 ζ 軸周りの回転 $|\omega_\zeta| \gg |\omega_\xi|, |\omega_\eta|$ も同様に議論できて、 ω_ζ が定数、 ω_ξ, ω_η が単振動となる。

問題は η 軸周りの回転、 $|\omega_\eta| \gg |\omega_\xi|, |\omega_\zeta|$ の場合である。同様の近似で $\omega_\eta \simeq \text{const.}$ となる。残りの方程式は、

$$\ddot{\omega}_\xi = \lambda^2 \omega_\xi, \quad \ddot{\omega}_\zeta = \lambda^2 \omega_\zeta,$$

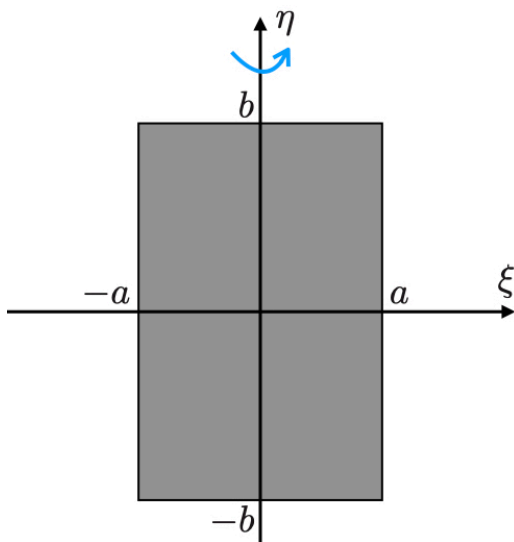


図 125 長方形の慣性主軸まわりの回転運動； η 軸まわりには不安定となる。

$$\lambda := \sqrt{\frac{(I_\zeta - I_\eta)(I_\eta - I_\xi)}{I_\xi I_\zeta}} \omega_\eta,$$

となる。方程式の符号に注目するとこれは単振動を表さないことに気づく。あえて $\lambda = i\Lambda$ とおくとみかけは単振動と同じになるので、一般解 (32.8) を適用して、

$$x(t) = \frac{A}{2} \left(e^{i(\Lambda t - \delta)} + e^{-i(\Lambda t - \delta)} \right) = \frac{A}{2} \left(e^{-\lambda t - i\delta} + e^{\lambda t + i\delta} \right), \quad (66.4)$$

となる。右辺の第 2 項に注目すると、因子 $\exp(\lambda t)$ は時間とともに指数函数的に増大する。これは最初の摂動の仮定に反する。したがって、はじめ η 軸周りの回転だけを考えていたのだが、時間発展とともに他の 2 軸周りの回転の影響が増大していき、近似式は破綻してしまう。このような運動は不安定であるという。

以上をまとめると剛体の 3 つの慣性主軸まわりの回転のうち慣性モーメントが最大、最小の場合は安定であり、中間の場合は不安定となる。この事実を**テニスラケットの定理**という。⁷⁾

ξ 軸方向に $2a$ 、 η 軸方向に $2b (> 2a)$ の長方形を例にとってみよう。このとき慣性モーメントは (60.11) より、 $I_\xi = Ma^2/3$ 、 $I_\eta = Mb^2/3$ 、 $I_\zeta = M(a^2 + b^2)/3$ であり、 $I_\zeta > I_\eta > I_\xi$ の大小関係にある。長方形はそれが含まれる面内での回転で安定であり、短い方の辺を回転軸にしたときも安定である。ところが長い方の辺を回転軸にした場合は不安定な回転となる。

§ 67. 円柱の運動

底面の半径が R 、長さ l で質量 M の円柱を角度 α の斜面で転がすことを考えよう。初期時

⁷⁾ 俗には Dzhanibekov 効果としても知られる。

刻の円柱の重心に原点をとり，斜面に沿って x 軸，垂直に y 軸，円柱と平行に z 軸をとる． z 軸周りの円柱の慣性モーメントを I とする．また簡単のために初期条件は $t = 0$ で円柱は静止しているとする．

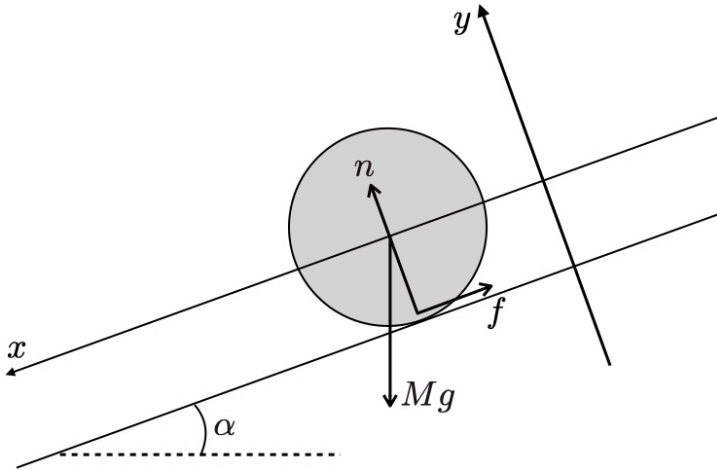


図 126 円柱の転がり運動

まず重心の並進運動から見ていこう．重心は斜面上に拘束されているので， y 軸方向には力が釣り合っている． x 軸方向には斜面と円柱の間に摩擦力 f がはたらく．よって重心の運動方程式，

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= Mg \sin \alpha - f, \\ M\ddot{y} &= n - Mg \cos \alpha = 0, \end{aligned} \tag{67.1}$$

がたてられる．ここで n は斜面からの垂直抗力．

次に回転運動について見ていく．回転は z 周りだけに限られるので，回転角を θ とおいて回転の運動方程式は，

$$I\ddot{\theta} = N_z. \tag{67.2}$$

ここで力のモーメントを計算すると，

$$\mathbf{N} = Mg(\sin \alpha \mathbf{e}_x - \cos \alpha \mathbf{e}_y) \times \mathbf{0} - f \mathbf{e}_x (-R \mathbf{e}_y) = f R \mathbf{e}_z,$$

なので， $N_z = fR$ ．円柱の運動は 2 パターン存在し，1 つは円柱が滑らず回転する場合．もう 1 つは回転が並進運動より遅れて滑っている場合（無回転も含む）．

まず滑らず回転する場合から始めよう．「滑らない」という条件は，「円柱が回転した弧長と並進移動した距離が等しい」という条件と等価である．式で書けば，

$$R\theta(t) = x(t), \tag{67.3}$$

がすべての時刻で成り立たなければならない．

回転の方程式を用いて x 方向の方程式から摩擦力 f を消去すると,

$$MR\ddot{x} + I\ddot{\theta} = MgR \sin \alpha,$$

となる. 左辺第2項に滑らない条件を用いれば, x だけの方程式,

$$\ddot{x} = \frac{MR^2}{MR^2 + I} g \sin \alpha, \quad (67.4)$$

あるいは θ だけの方程式,

$$\ddot{\theta} = \frac{MR}{MR^2 + I} g \sin \alpha, \quad (67.5)$$

を得る. 円柱はあたかも重力加速度が $MR^2 g \sin \alpha / (MR^2 + I)$ で落下する質点のように斜面を転がり落ちる. 一方で滑らないためには摩擦力 f が最大静止摩擦力よりも小さくなくてはならないので, 静摩擦係数を μ とすると

$$f \leq \mu n = \mu Mg \cos \alpha,$$

が成り立たなければならない. 摩擦力は回転の方程式から $f = I\ddot{\theta}/R = I\ddot{x}/R^2$ なので, 上の条件は

$$\mu \geq \frac{I}{MR^2 + I} \tan \alpha =: \mu^*, \quad (67.6)$$

と書き換えられる. つまり滑らないためには傾斜 α を小さくするか比 MR^2/I を大きくする必要がある. たとえば円柱は $I = MR^2/2$, 中空な円筒の場合は $I = MR^2$ なので円柱の方が円筒より滑りにくい.

一方で円柱が滑ってしまう場合は, 言い換えると「円柱が回転速度と並進速度が異なる」という場合である. まず回転が遅れている場合を式で書けば,

$$R\dot{\theta}(t) < \dot{x}(t), \quad (67.7)$$

となる. このとき動摩擦力 $f = \mu' n$ が円柱には働く (μ' は動摩擦係数). (67.1) と (67.2) より運動方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g(\sin \alpha - \mu' \cos \alpha), \\ \ddot{\theta} &= \frac{\mu'}{I} MgR \cos \alpha. \end{aligned} \quad (67.8)$$

この2つはすぐに積分が実行できて, 回転が遅れているという不等式は

$$\frac{R^2}{I} MR^2 \cos \alpha < \sin \alpha - \mu' \cos \alpha,$$

となる. 整理すれば,

$$\mu' < \mu^*. \quad (67.9)$$

が得られる.

一般に動摩擦係数 μ' は最大静止摩擦係数 μ よりも小さい. そのため最大静止摩擦力を超えると自動的にこの不等式が満たされる. 逆に言えば回転が早い $R\dot{\theta}(t) > \dot{x}(t)$ というのはありえない.

ここでは初期条件として静止している場合を考えた. しかし初速が与えられている場合には摩擦力の大小関係の扱いが複雑になる. この点については次の節で議論する.

ここまでの議論は円柱以外の剛体にも拡張できる. 実は z 方向に円形の断面を持ち, 円柱と同じようにまっすぐ転がる剛体で, 密度が z 軸周りに対称ならば全く同じ議論を当てはめることができる. その際 R は剛体のうち最大の円形断面の半径であり, 力のモーメントは $N_z = fR$ のまま.

§ 68. 撃力を受けた剛体の運動

剛体に撃力を加えることを考える. 剛体に力を加えるときはその位置が問題になる. 重心に加えるときは, 並進運動のみ変化する. しかし重心以外の点に力を加えれば剛体に力のモーメントが生じ, 回転運動を引き起こす.

撃力を \mathbf{F}_I とし, それ以外の外力を \mathbf{F} とすると重心の並進運動の方程式は,

$$M\dot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}_I + \mathbf{F}, \quad (68.1)$$

となる. ここで M は剛体の全質量. 両辺を撃力がはたらいている短い時間 Δt にわたって積分する. 撃力はこの時間の間だけ非常に大きいので, 相対的に外力の寄与は無視しても良いと仮定しよう. したがって

$$M\dot{\mathbf{r}}_G(\Delta t) - M\dot{\mathbf{r}}_G(0) = \mathcal{I}. \quad (68.2)$$

ここで,

$$\mathcal{I} := \int_0^{\Delta t} dt \mathbf{F}_I, \quad (68.3)$$

は撃力により剛体に働く力積である. 初めの時刻で剛体が静止していた ($\dot{\mathbf{r}}_G(0) = \mathbf{0}$) とすると,

$$M\dot{\mathbf{r}}_G(\Delta t) = \mathcal{I}. \quad (68.4)$$

剛体は撃力を受けた後は重心速度 $\dot{\mathbf{r}}_G(\Delta t) = \mathcal{I}/M$ で並進運動する. この事実は質点の場合と同じである.

次に, 重心から見て撃力のはたらく位置ベクトルを \mathbf{l} とすると, 回転運動の方程式は,

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}_I + \mathbf{N}. \quad (68.5)$$

ここで I は慣性モーメント, \mathbf{N} は外力 \mathbf{F} により生じる力のモーメント. 同じように両辺を撃力がはたらいている短い時間 Δt にわたって積分し, その際に外力の寄与は無視しても良いとすると,

$$I\boldsymbol{\omega}(\Delta t) - I\boldsymbol{\omega}(0) = \mathbf{l} \times \mathcal{I}, \quad (68.6)$$

となる．ただし撃力の作用点の位置 l はこの短い時間の変化しないと仮定した．

もしはじめの時刻 $t = 0$ で剛体が静止していて回転もしていないとすると，

$$M\dot{r}_G(\Delta t) = \mathcal{I}, \quad I\omega(\Delta t) = l \times \mathcal{I},$$

となる．上式は撃力を受けた後の剛体の運動の速度と角速度の初期条件を与えている．

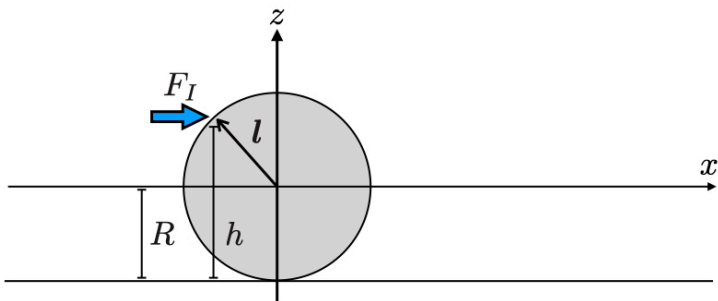


図 127 ビリヤードのモデル

例として水平面上に置かれた半径が R の剛体球に撃力を与えることを考えよう（ビリヤードのモデル）．ただし撃力の向きは水平面に平行で，剛体球の中心を通る鉛直面内にあるとする．よって撃力の加わる位置は水平面からの高さ h だけで定まる．はじめの時刻での剛体球の中心（重心）に原点をとり（水平面を xy 平面とする），撃力の位置が $l = -l_x e_x + (h - R)e_z$ とする ($l_x = \sqrt{R^2 - (h - R)^2}$)．撃力の向きは x 軸方向を向いている： $F_I = F_I e_x$ ．剛体球は x 軸方向にしか運動しないので x 成分だけに着目すると，重心座標の初期条件は

$$M\dot{x}_G(\Delta t) = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I} := \int_0^{\Delta t} dt F_I,$$

で与えられる．回転運動は y 軸周りに限られるので y 成分だけに着目すると，

$$I\omega_y(\Delta t) = (l \times \mathcal{I} e_x)_y = (h - R)\mathcal{I}.$$

ここで剛体球の慣性モーメントは $I = 2MR^2/5$ である．

撃力を受けた後の剛体球の運動方程式は，

$$M\ddot{x}_G = f, \quad I\dot{\omega}_y = -Rf.$$

ここで f は水平面と剛体球の間に生じる摩擦力で x 軸の正の向きに働くとした．摩擦力が働くときは並進運動と回転運動との間のずれが問題になる．まず滑らないときは初期条件において $\dot{x}_G(\Delta t) = R\omega_y(\Delta t)$ ，すなわち

$$\dot{x}_G(\Delta t) - R\omega_y(\Delta t) = \frac{(7R - 5h)\mathcal{I}}{2MR} = 0,$$

が成り立つ。 h に対する条件は $h = 7R/5$ であり加える撃力の大きさには依存しない。このとき摩擦力は働かず $f = 0$ 。運動方程式より $\dot{x}_G(t) = \dot{x}_G(\Delta t) = \mathcal{I}/M$ かつ $\omega_y(t) = \omega_y(\Delta t) = \mathcal{I}/(MR)$ で等速直線運動し、常に並進と回転は一致し続ける。

次に回転の方が速く、並進運動が遅い場合： $\dot{x}_G(\Delta t) < R\omega_y(\Delta t)$ 。または h に対する条件は $h > 7R/5$ 。このとき摩擦力は動摩擦係数を μ' として $f = \mu'Mg$ とかける（向きは x 軸の正の向き）。運動方程式は $\ddot{x}_G = \mu'g, \dot{\omega}_y = -\mu'MRg/\mathcal{I}$ となる。両辺時間で積分して Δt に比例する項を無視すれば、

$$\dot{x}_G(t) = \frac{\mathcal{I}}{M} + \mu'gt, \quad \omega_y(t) = \frac{5(h-R)\mathcal{I}}{2MR^2} - \frac{5\mu'g}{2R}t.$$

任意の時刻での並進と回転のずれは、

$$\dot{x}_G(t) - R\omega_y(t) = \frac{7}{2}\mu'gt - \frac{(5h-7R)\mathcal{I}}{2MR},$$

で与えられる。つまり摩擦力によって徐々に回転が遅くなり並進は速くなる。よってある時刻

$$t^* := \frac{(5h-7R)\mathcal{I}}{7\mu'MgR} > 0,$$

において2つの運動のずれはなくなり、速度・角速度が $\dot{x}_G(t^*) = R\omega_y(t^*)$ の等速直線運動になる。

PROBLEM

PROBLEM1. ビリヤードのモデルにおいて、初期時刻において回転運動の方が遅く並進運動の方が速い場合について議論せよ。 SOLUTION.

§ 69. 対称コマの運動

対称コマの軸先を水平面上に固定し、そのまわりの回転運動を議論しよう。密度が一様な場合の対称コマの慣性モーメントテンソルは慣性主軸において軸対称であり

$$I = \begin{pmatrix} I_\xi & & \\ & I_\xi & \\ & & I_\zeta \end{pmatrix}, \tag{69.1}$$

と与えられる。固定点に原点 O をとる。原点から見た対称コマの重心の座標は（対称性より） ζ 軸上にあるので $b\mathbf{e}_\zeta$ とかける。 b は原点と重心の距離。このとき慣性モーメントテンソルの ξ, η 成分は Steiner の定理により修正を受けて $I_\xi + Mb^2$ となるが、その対称性は変わらない。そこで改めて $I := I_\xi + Mb^2, I' := I_\zeta$ とおく。Euler 方程式は (64.6) より、

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_\xi + (I' - I)\omega_\eta\omega_\zeta &= N_\xi, \\ I\dot{\omega}_\eta + (I - I')\omega_\zeta\omega_\xi &= N_\eta, \\ I'\dot{\omega}_\zeta &= N_\zeta, \end{aligned} \tag{69.2}$$

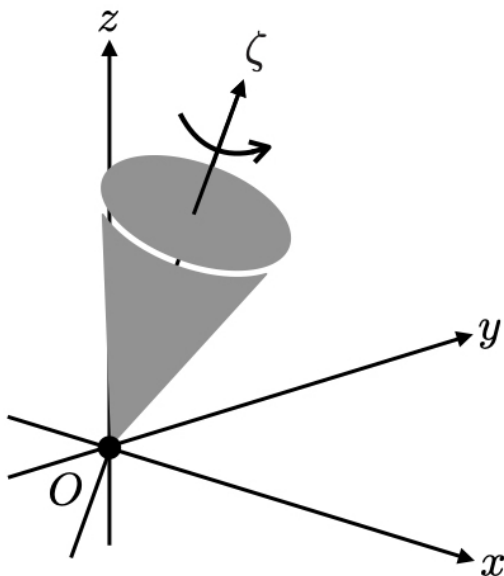


図 128 対称コマの固定点周りの回転運動

で与えられる。剛体に重力 $-Mg\mathbf{e}_z$ が働くとする、重力による力のモーメントは、

$$\mathbf{N} = b\mathbf{e}_\zeta \times (-Mg)\mathbf{e}_z = -Mgb\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_z.$$

重力以外に外力がないとすると \mathbf{N} は ζ 軸に垂直であり $N_\zeta = 0$ がわかる。よって Euler 方程式の ζ 成分から $\dot{\omega}_\zeta = 0$ 、すなわち、

$$\omega_\zeta = \text{const.} =: \omega_0, \quad (69.3)$$

がわかる。このことから角運動量の ζ 成分 $L_\zeta = I'\omega_0$ も定数である。同様の議論で、 \mathbf{N} は z にも垂直なので $N_z = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_z = 0$ であり、角運動量の z 成分 $L_z = \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_z$ は定数である。右辺に $\mathbf{L} = I\omega_\xi\mathbf{e}_\xi + I\omega_\eta\mathbf{e}_\eta + I'\omega_\zeta\mathbf{e}_\zeta$ と (65.7) を代入して内積を計算すれば、

$$L_z = -I\omega_\xi \cos \psi \sin \theta + I\omega_\eta \sin \psi \sin \theta + I'\omega_0 \cos \theta. \quad (69.4)$$

次に Euler 方程式の ξ 成分に ω_ξ をかけ、 η 成分に ω_η をかけ、この 2 つの辺々を足し算すれば、

$$I\omega_\xi\dot{\omega}_\xi + I\omega_\eta\dot{\omega}_\eta = \omega_\xi N_\xi + \omega_\eta N_\eta.$$

力のモーメントを慣性主軸で見ると (65.8) より $\mathbf{N} = Mgb \sin \theta (\sin \psi \mathbf{e}_\xi + \cos \psi \mathbf{e}_\eta)$ と与えられる。Euler 角は (65.10) より、

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{1}{\sin \theta} (-\omega_\xi \cos \psi + \omega_\eta \sin \psi), \\ \dot{\theta} &= \omega_\xi \sin \psi + \omega_\eta \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= \omega_0 + \cot \theta (\omega_\xi \cos \psi - \omega_\eta \sin \psi), \end{aligned} \quad (69.5)$$

を満たすが、この方程式の2つ目を利用すれば、

$$I\omega_\xi\dot{\omega}_\xi + I\omega_\eta\dot{\omega}_\eta = Mgb\dot{\theta}\sin\theta,$$

となる。両辺を時間で積分して積分定数を $E - I'\omega_0^2/2$ とおけば、

$$\frac{1}{2}\left(I\omega_\xi^2 + I\omega_\eta^2 + I'\omega_0^2\right) + Mgb\cos\theta = E, \quad (69.6)$$

が成り立つ。左辺は第1項が対称コマの回転エネルギーを表し、第2項が重力ポテンシャルを表す。それゆえ E は対称コマのエネルギーと解釈でき、(69.6) はエネルギー保存則といえる。以上からこの運動には3つの保存量 ω_0, L_z, E があることがわかった。固定されているので対称コマの自由度は3であり、同量の保存量が定まったのでこれらの量で運動が完全に決定される。

(69.5) の1つ目と2つ目の式から $\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 = \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2$ という関係がわかるので、エネルギー保存則の式は

$$\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 + \alpha \cos\theta = \epsilon, \quad (69.7)$$

という Euler 角だけの式にできる。ただし、

$$\alpha := \frac{2Mgb}{I}, \quad \epsilon := \frac{2E - I'\omega_0^2}{I}, \quad (69.8)$$

とおいた。

さらに (69.5) の1つ目を用いて (69.4) は

$$\dot{\phi} \sin^2\theta + \beta \cos\theta = \lambda, \quad (69.9)$$

という Euler 角だけの式にできる。ただし、

$$\beta := \frac{I'\omega_0}{I}, \quad \lambda := \frac{L_z}{I}, \quad (69.10)$$

とおいた。 α, β はコマの形状に依存するパラメータであり、 ϵ, λ は初期条件に依存するパラメータである。(69.9) を $\dot{\phi}$ について解き、(69.7) へ代入すれば、 θ だけの方程式

$$\dot{\theta}^2 + \frac{(\lambda - \beta \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + \alpha \cos\theta = \epsilon, \quad (69.11)$$

が得られる。最後に変数変換 $u = \cos\theta$ を行えば、

$$\dot{u}^2 = (\epsilon - \alpha u)(1 - u^2) - (\beta u - \lambda)^2, \quad (69.12)$$

となる。左辺の u の多項式を $f(u)$ とおくと、 $\dot{u} = \pm\sqrt{f(u)}$ であり変数分離を行い両辺を積分すれば、

$$t - t_0 = \pm \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{f(u)}},$$

となり、積分が実行できれば軌道の式 $u = u(t)$ を得ることができる。 $u = \cos \theta$ が求めれば (69.9) を変形して、

$$\dot{\phi} = \frac{\lambda - \beta u}{1 - u^2}, \quad (69.13)$$

から軌道 $\phi = \phi(t)$ が定まる。最後に (69.5) の1つ目と3つ目の式を整理して、

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \dot{\phi}u = \omega_0 - \frac{\lambda - \beta u}{1 - u^2}u, \quad (69.14)$$

から軌道 $\psi = \psi(t)$ も定まる。

しかしながら最初の u についての積分 $\int du f^{-1/2}$ は厳密に計算することはできない。近寄りを駆使して運動の性質を調べよう。

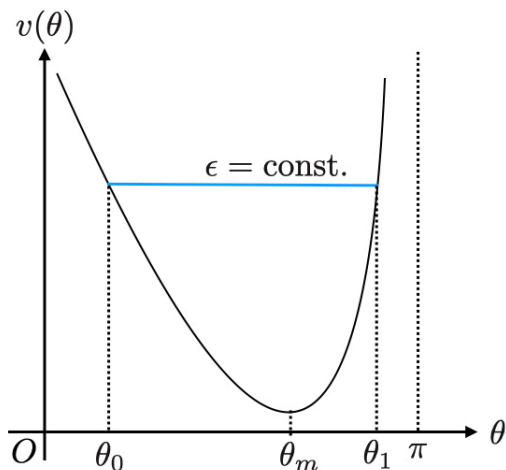


図 129 ポテンシャル $v(\theta)$ の下でのエネルギー保存則

運動方程式には $\dot{\theta}^2$ の項があるがこれは必ず正である。よって次の不等式が成り立たなければならない：

$$\epsilon - v(\theta) \geq 0. \quad (69.15)$$

ここで

$$v(\theta) := \frac{(\lambda - \beta \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \alpha \cos \theta. \quad (69.16)$$

この不等式は普通のエネルギー保存則と同じ議論が適用できる。すなわち実際の θ の軌道はポテンシャル $v(\theta)$ の上のエネルギー ϵ 一定の領域のみである。いま $0 \leq \theta \leq \pi$ における $v(\theta)$ の形から θ は束縛されていて $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ に限られる。対称コマの回転軸の傾き θ はこの領域で振動すると予想される。

まずは計算が簡単な $v(\theta)$ の極小点 θ_m での解を求めよう。極小点では $\dot{\theta}^2 = \epsilon - v(\theta_m) = 0$ より $\dot{\theta} = 0$ 。よって $\theta = \theta_m$ で一定値をとり続ける。極値を取る条件 $dv^{(\text{eff})}(\theta)/d\theta|_{\theta=\theta_m} = 0$ より

$$0 = \frac{1}{\sin^3 \theta_m} (\beta - \lambda \cos \theta_m)(\lambda - \beta \cos \theta_m) - \alpha \cos \theta_m,$$

となる。 $\dot{\phi}$ を求める式を用いて λ を消去して整理すれば

$$\dot{\phi}^2 - \frac{\beta}{\cos \theta_m} \dot{\phi} + \frac{\alpha}{2 \cos \theta_m} = 0.$$

2 次方程式を解けば

$$\dot{\phi} = \frac{I' \omega_0}{2I \cos \theta_m} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MgbI \cos \theta_m}{(I' \omega_0)^2}} \right],$$

が得られ、 $\dot{\phi}$ が実数であるための条件は判別式から

$$\omega_0 \geq \frac{2\sqrt{MgbI \cos \theta_m}}{I'}$$

となる。 ω_0 が十分大きいときには

$$\dot{\phi} \simeq \frac{I' \omega_0}{I \cos \theta_m}, \quad \frac{Mgb}{I' \omega_0},$$

と近似でき、1つ目が速い回転、2つ目は遅い回転である。どちらの場合もコマは回転軸を一定の傾きを保ったまま z 軸周りに回転する。このような回転運動を歳差運動という。

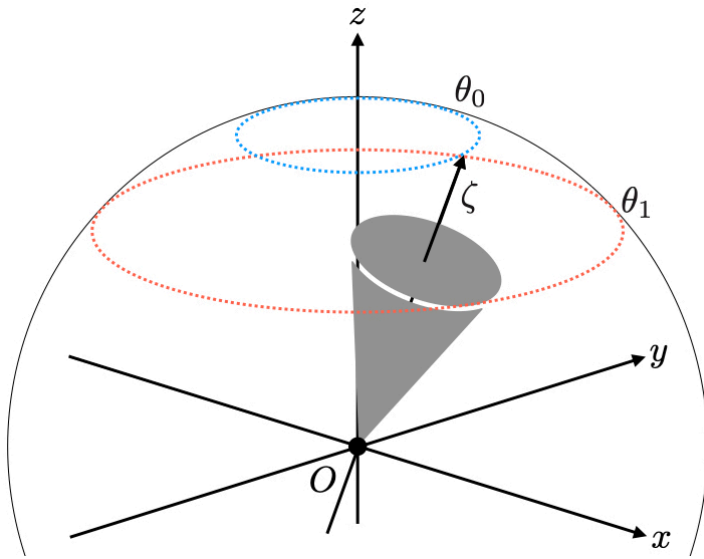


図 130 章動

次に $\epsilon > v(\theta)$ の場合に回転が十分速く ω_0 が大きい場合を考える。このとき $\alpha/\beta^2 = MgbI/(I' \omega_0)^2 \ll 1$ と評価できる。初期条件 $t = 0$ で $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ かつ $\dot{\phi} = 0$ とすると、

$$u_0 := \cos \theta_0 = \frac{\epsilon}{\alpha} = \frac{\lambda}{\beta},$$

が成り立つ。すると

$$\dot{u}^2 = \beta^2(u_0 - u) \left[-(u_0 - u) - \frac{\alpha}{\beta^2}(1 - u^2) \right]$$

ここで α/β^2 の項で $1 - u^2 \simeq 1 - u_0^2$ と近似すれば,

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 &\simeq \beta^2(u_0 - u)(u - u_1), \\ u_1 &:= u_0 - \frac{\alpha}{\beta^2}(1 - u_0^2). \end{aligned}$$

この式から \dot{u} は 2 つの転回点 u_0, u_1 ($u_1 < u < u_0$) を持つことがわかる。積分は変数分離により容易に実行できて

$$u = \frac{u_0 - u_1}{2} \cos \beta t + \frac{u_1 + u_0}{2},$$

がわかる。 $u = \cos \theta$ だから逆に解いて

$$\theta \simeq \theta_0 + \Delta\theta(1 - \cos \beta t), \quad \Delta\theta := \frac{\alpha}{\beta^2} \sin \theta_0, \quad (69.17)$$

が導かれ、周期 β で回転軸の傾き θ が振動する。このような運動を**章動** (mutation) という。

最後に $t = 0$ で $\theta = 0$, つまりコマが直立している場合を考える。このとき $u_0 = 1$ であり $\lambda = \beta, \epsilon = \alpha$ となる。特に前者からは $L_z = I' \omega_0 = L_\zeta$ である。

ポテンシャル $v(\theta)$ を $\theta \ll 1$ として展開し θ の 2 次まで求めると,

$$v(\theta) = \alpha + \frac{1}{2}k\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4), \quad (69.18)$$

ここで

$$k := \frac{\beta^2}{2} - \alpha. \quad (69.19)$$

θ^2 の項は $k > 0$ ならば復元力であり、回転軸が垂直から少しでもぶれると元に戻すような力が働く。すなわち直立の回転は安定である。一方で $k \leq 0$ ならば復元力は働かずむしろ θ を増大させてしまう。 $k > 0$ の条件を書き換えると

$$\omega_0 > \frac{2\sqrt{MgbI}}{I'}, \quad (69.20)$$

でありこの不等式を満たす十分速い回転であれば直立したまま安定して回り続ける。このような運動を**眠りゴマ**という。しかし摩擦などによりそれが減衰すると少しの傾きで倒れてしまうだろう。

§ 70. ジャイロスコープ

前節で議論したように軸対称な慣性モーメントをもつ剛体コマは歳差運動や章動といった特徴的な運動を示す。これは剛体のもつ角運動量の保存則によるものである。ここではこの対称コマを利用したジャイロスコープを紹介する。

たとえば回転していないコマは傾いた状態で静止することはおろか直立させることすら難しく、すぐに倒れてしまうだろう。しかし回転させて角運動量を与えることで傾いた状態を維持する歳差運動が可能になり、またコマが倒れる方向へは章動とよばれる振動運動を示す。回転する物体が安定的に姿勢を維持できることは日常においても重要な役割を果たしている。自転車はその一例で、自転車を漕がずに静止することは難しいが、一度漕ぎ始めれば姿勢を維持することは簡単である。また地球が外部の複雑な重力場の中でも自転の回転軸（地軸）を一定に保つことができる。

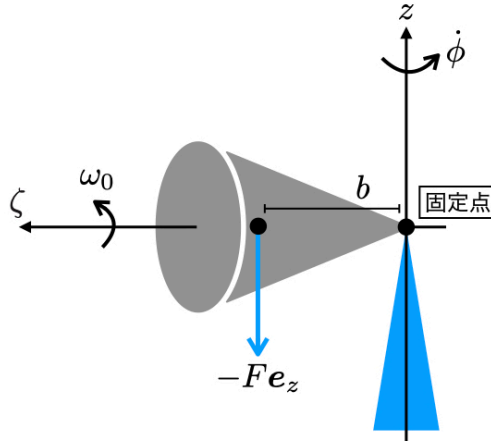


図 131 固定点まわりで水平に歳差運動する対称コマ

再び対称コマを考え、主慣性モーメントは $\text{diag}(I, I, I')$ であるとする。対称軸の一端を支柱の上に固定して回転運動だけを許すようにする。そしてコマを水平 ($\theta_0 = \pi/2$) にした状態で ζ 軸回りに角速度 ω_0 を与える。このとき剛体の角運動量は $\mathbf{L} = I'\omega_0\mathbf{e}_\zeta$ とかける。慣性基準系の水平面を xy 平面とし、垂直に z 軸を設ける。

この対称コマに重力のような z 軸の負の向きに一定の力 $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_z$ が重心（または ζ 軸上の任意の点）に加わると、力のモーメントは ζ に直交した方向に $\mathbf{N} = N_\xi\mathbf{e}_\xi + N_\eta\mathbf{e}_\eta$ として加わる。固定点から見た力の作用点の位置ベクトルを $b\mathbf{e}_\zeta$ とすれば力のモーメントは $Fb\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\zeta$ である。対称コマの Euler 方程式 (69.2) より

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_\xi + (I' - I)\omega_\eta\omega_\zeta &= N_\xi, \\ I\dot{\omega}_\eta + (I - I')\omega_\zeta\omega_\xi &= N_\eta, \\ I'\dot{\omega}_\zeta &= 0, \end{aligned} \tag{70.1}$$

である。ここで $N_\xi = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_\xi$, $N_\eta = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_\eta$ である。第 3 式から初めに与えた角速度 $\omega_\zeta = \omega_0$ は保存する。残り 2 つの方程式は

$$I(\dot{\omega}_\xi - \omega_0\omega_\eta) + I'\omega_0\omega_\eta = N_\xi, \quad I(\dot{\omega}_\eta + \omega\omega_\xi) - I'\omega_0\omega_\xi = N_\eta. \tag{70.2}$$

と変形される。

ω_0 が十分速くて

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{Fb}{(I'\omega_0)^2} \ll 1, \quad (70.3)$$

を満たす場合には前節の結果から初期条件 $\theta_0 = \pi/2$ と合わせて Euler 角の振動解

$$\theta(t) \simeq \frac{\pi}{2} + \Delta\theta \left[1 - \cos\left(\frac{I'\omega_0}{I}t\right) \right], \quad \Delta\theta = \frac{Fb}{(I'\omega_0)^2} \quad (70.4)$$

が得られる。これは章動であるが、いまは簡単のため後ろの振動項は小さいとして無視してしまおう： $\theta(t) \sim \pi/2$ 。したがってコマはほとんど水平を保ち続け続けながら回転する。Euler 角と角速度の間の関係式からは

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &\sim -\omega_\xi \cos \psi + \omega_\eta \sin \psi, & \dot{\psi}(t) &\sim \omega_0, \\ \dot{\theta}(t) &\sim 0 = \omega_\xi \sin \psi + \omega_\eta \cos \psi, \end{aligned} \quad (70.5)$$

がわかる。対称コマにはエネルギー以外の保存量として角運動量の z 成分 L_z があった。その式は

$$L_z = -I\omega_\xi \sin \theta + I\omega_\eta \sin \psi \sin \theta + I'\omega_0 \cos \theta, \quad (70.6)$$

であった。 $\dot{\phi}$ の式と比較すればいまの近似のもとでは

$$\dot{\phi} \sim \frac{L_z}{I} \quad (= \lambda), \quad (70.7)$$

であることがわかる。Euler 角 ϕ は z 軸周りの回転に対応していたので、対称コマは水平を保ったまま z 軸周りに一定の角速度で回転することがわかった。 $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ の式を ω_ξ, ω_η について解けば

$$\omega_\xi \sim -\dot{\phi} \cos \psi, \quad \omega_\eta \sim \dot{\phi} \sin \psi,$$

がわかる。これを運動方程式 (70.2) に代入して整理すると

$$N_\xi = I'\omega_0 \dot{\phi} \sin \psi, \quad N_\eta = I'\omega_0 \dot{\phi} \cos \psi,$$

となる。右辺については基本ベクトルの間の関係が (回転行列 $O(\psi, \pi/2, \phi)$ を用いて)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\sin \psi \sin \phi & \sin \psi \cos \phi & -\cos \psi \\ -\cos \psi \sin \phi & \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}, \quad (70.8)$$

で与えられる。これより $\mathbf{e}_z \sim -\cos \psi \mathbf{e}_\xi + \sin \psi \mathbf{e}_\eta$ なので $N_\xi \sim Fb \sin \psi$, $N_\eta \sim Fb \cos \psi$ と近似できる。したがって

$$\dot{\phi} \sim \frac{Fb}{I'\omega_0} = \frac{N}{L_\zeta}, \quad (70.9)$$

がわかる。回転は ω_0 が大きいほどゆっくりになっていく。ここで $N = Fb \sin \theta \sim Fb$ は力のモーメントの大きさである。これが章動を無視したときの歳差運動の本質的な部分であり単純歳差運動と呼ばれる。簡単に言えばコマに外部から力が加えられると力の向きと直交する面内で回転する。外部の力そのものは固定点からの抗力とつり合っているの、ここで重要な

点は力のはたらく方向への (θ まわりの) 「回転」が発生しない (あっても小さく振動する) ことである。

ではなぜ θ 方向の回転が発生しないかをもう少し深く考えてみよう。 θ についての角加速度を調べていくと

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= I(\dot{\omega}_\xi - \omega_0\omega_\eta) \sin \psi + (\dot{\omega}_\eta + \omega_0\omega_\xi) \cos \psi \\ &= (N_\xi - I'\omega_0\omega_\eta) \cos \psi + (N_\eta + I'\omega_0\omega_\xi) \sin \psi, \\ &\sim N - I'\omega_0\dot{\phi} \end{aligned}$$

となっている。単純歳差運動では最後の式は 0 に等しい。第 2 項が加えられた力のモーメントとつり合うので θ 方向には回転が生じないと言える。 $\dot{\phi}$ は z 軸方向の角速度ベクトル $\dot{\phi}e_z$ で、角運動量 $L_\zeta = I'\omega_0$ は ζ 軸方向で $L_\zeta e_\zeta$ と書けるからこれら 2 つのベクトルの外積は ϕ による回転方向を向いている。他方で力のモーメント \mathbf{N} は z 軸の負の方向を向いたベクトル $\mathbf{F} = -Fe_z$ と ζ 軸方向のベクトル be_ζ との外積であった。よって 2 つのベクトル \mathbf{N} と $\dot{\phi}e_z \times (I'\omega_0)e_\zeta$ は互いに逆向きでなければならない (あるいは逆向きになるように $\dot{\phi}$ の符号、つまり歳差運動の回転方向が決まる)。

$$\mathbf{N} = \dot{\phi}e_z \times (I'\omega_0)e_\zeta. \quad (70.10)$$

この第 2 項は (角速度) \times (角運動量) という形をしており、もとを辿れば角運動量の時間微分のうち基本ベクトルに作用した項に由来している。そのような項は質点の力学では遠心力や Coriolis 力といった慣性力として非慣性系の運動方程式に現れた。中でも Coriolis 力は (角速度) \times (運動量) という形であった。運動方程式の対応関係 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \leftrightarrow \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$ と同様のことが Coriolis 力についても (2 倍を除いて) 成立している、と見ることができる。

自由運動の節で述べたように力のモーメントが働かない対称コマは対称軸まわりでやはり歳差運動する。その解は

$$\omega_\xi = A \cos(\Omega t - \delta), \quad \omega_\eta = -A \sin(\Omega t - \delta), \quad \omega_\zeta = \omega_0. \quad (70.11)$$

と書ける。ここで A, ω_0 は時間に依らない定数であり、 $\Omega = (I - I')\omega_0/I$ と定義した。初期条件をうまく選べば剛体の静止系では歳差運動しない (またはほとんど無視できる) ようにできる。いま微小な時間 δt だけ力のモーメント \mathbf{N} が対称コマに働いたとすると、上述の通りにコマは z 軸まわりに歳差運動を行なって回転する。力のモーメントが作用しなくなると $\dot{\phi} = 0$ なので歳差運動も止まる。微小時間回転角の変化分は

$$\delta\phi = \dot{\phi}\delta t \sim \frac{N}{I'\omega_0}\delta t, \quad (70.12)$$

で与えられることになる。この関係式を使えば対称コマのある時間の間の角度変化を検出することで系に働いた力のモーメントの大きさを知ることができる。

この原理を応用して物体の角速度や角加速度を検出できるようにしたものをジャイロスコープ (gyroscope) という。ジャイロスコープには明確な固定点はないが重心のまわりに自由に

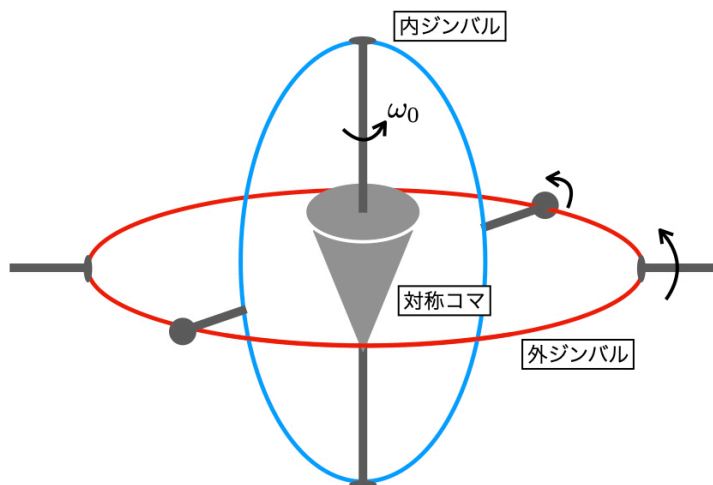


図 132 ジャイロ스코ープ

回転できるようにフレームの中央に回転コマ（ローター）が固定されている。この回転フレームをジンバル (gimbal) という。一番外側のジンバルが航空機や船舶などに固定される。機体が移動したり回転して角度を変えると角加速度がジンバルに生じて回転コマにはそれに応じた力のモーメントが発生する。これから逆算して機体の回転角を計算することが可能となる。

ジャイロ스코ープは十分 ω_0 が大きければ $\delta\phi$ を小さく抑えられるので、一定方向を維持するための器械にも応用できる。たとえば羅針盤として設計されたジャイロコンパスがある。

PROBLEMS

地上ではすべての物体に常に重力が地球の中心へ向かって作用する。たとえば車や飛行機にこの固定点で自由に回転できる対称コマを配置しておく。そして乗り物が傾いたりして乗り物から見た重力の方向が変わったとき、対称コマにはずれた分だけの重力が作用する。するとコマは重力によってその位置を変える間歳差運動を行い、重力との力学的平衡の位置で止まると歳差運動もやめる。

第 2 項の意味を理解するには固定点で角速度 $\dot{\phi}$ で回転する回転座標系 $x'y'z'$ に移ると便利である。基本ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{x'} \\ \mathbf{e}_{y'} \\ \mathbf{e}_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y \\ -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad (70.13)$$

で変換される。

§ 71. 剛体の Newton 重力理論

まずは質点の Newton 重力について復習しよう。質点に働く Newton 重力は (47.1) より、

$$\mathbf{F}_G(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \mathbf{r}, \tag{71.1}$$

である。ここで $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ を 2 質点の相対座標とすると $r = |\mathbf{r}|$ は 2 質点間の距離であり、そして m_1, m_2 は質点の質量である。質点 1 が感じる重力ポテンシャルは、

$$\phi_G(\mathbf{r}_1) = \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \tag{71.2}$$

と与えられる。この重力ポテンシャル ϕ_1 は、 \mathbf{r}_1 の関数と見たとき「質量 m_2 をもつ質点 2 が位置 \mathbf{r}_1 に作る重力場」という。

大きさのある剛体については Newton 重力の理論は修正を要する。各質点が重力場を作るとすると剛体のつくる重力ポテンシャルは、各質点の作る重力場の足し合わせであると仮定して、

$$\phi_G(\mathbf{x}) = -G \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}, \tag{71.3}$$

で与えられるとする。⁸⁾ ここで $\rho(\mathbf{x})$ は剛体の密度。(71.3) は密度分布 $\rho(\mathbf{x}')$ をもつ剛体が位置 \mathbf{x} に作る重力場を表している。

(71.3) はある種の積分方程式である。⁹⁾ 密度 ρ が決まれば一意に重力ポテンシャル ϕ が定まる。

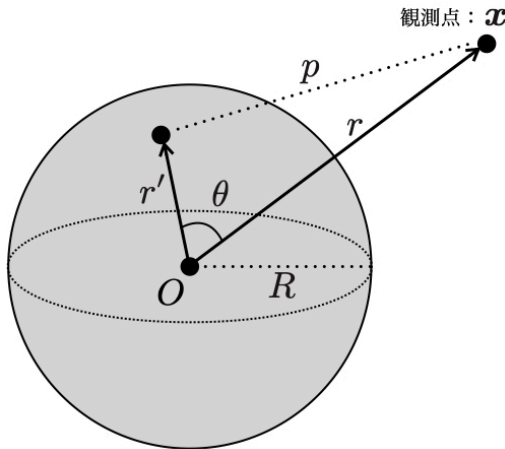


図 133 球体の作る重力場

⁸⁾ 実際これは相対性理論の枠内で正しくない。重力場が足し算で良いのは重力エネルギーが静止質量 mc^2 に比べて十分小さいときである。詳細は一般相対性理論の章を参照せよ。

⁹⁾ 実は (71.3) は Poisson 方程式と呼ばれる微分方程式と等価であることがわかる。Poisson 方程式は $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ という形をしている。 Δ は Laplacian。詳細は電磁気学、静電場の節を参照せよ。

簡単な例として半径 R の球体のつくる重力場を計算してみよう．密度は一様で $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ とする．観測点 \mathbf{x} につくられる重力ポテンシャルは

$$\phi_G(\mathbf{x}) = -\frac{3GM}{4\pi R^3} \int \frac{d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}.$$

後ろの積分については球面極座標により $r' = |\mathbf{x}'|$, \mathbf{x} と \mathbf{x}' のなす角を θ とおくと

$$\phi_G(\mathbf{x}) = -\frac{3GM}{2R^3} \int_0^R dr' \int_0^\pi d\theta r'^2 \sin\theta \left[r'^2 - 2r'r \cos\theta + r^2 \right]^{-1/2}.$$

ここで方位角 φ の積分はただちに実行できて 2π を与え, $r = |\mathbf{x}|$ とおいた．先に θ 積分を計算しよう: 変数変換 $p = [r'^2 - 2r'r \cos\theta + r^2]^{1/2}$ をすると,

$$\phi_G(\mathbf{x}) = -\frac{3GM}{2R^3} \int_0^R dr' r'^2 \int_{p_-}^{p_+} dp \frac{1}{rr'}.$$

ところで p は余弦定理によって観測点 \mathbf{r} と球内の微小体積 $d^3\mathbf{r}'$ との距離であり,

$$p_\pm := \sqrt{(r \pm r')^2}.$$

$p_+ = r + r'$ であるが p_- は符号に注意が必要である．観測点 \mathbf{r}' が球の外側 $R < r$ にあるならば常に $r' < r$ であり $p_- = r - r'$ ．他方で観測点が球の内部 $r < R$ にある場合は $r < r' < R$ と $0 < r' < r$ で積分を分ける必要がある．まずは外側の場合に計算していこう． p 積分は直ちに実行されて $\int dp = p_+ - p_- = 2r'$ となる．残りの r 積分は,

$$\phi_G(\mathbf{x}) = -\frac{3GM}{R^3 r} \int_0^R dr' r'^2 = -\frac{GM}{r},$$

となる．一方で球内部においては動径方向の積分を分けて,

$$\phi_G(\mathbf{x}) = -\frac{3GM}{2R^3 r} \left[\int_0^r dr' + \int_r^R dr' \right] r'(p_+ - p_-),$$

第1項では $p_+ - p_- = 2r'$, 第2項では $p_+ - p_- = 2r$ として積分を計算すれば,

$$\phi_G(\mathbf{x}) = -\frac{3GM}{2R} + \frac{GM}{2R^3} r^2,$$

と求まる．

以上の結果を合わせると,

$$\phi_G(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{GM}{r} & (R < r) \\ -\frac{3GM}{2R} + \frac{GM}{2R^3} r^2 & (0 < r \leq R) \end{cases}. \quad (71.4)$$

質点に働く力はこの勾配をとって

$$\mathbf{F}_G(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{GM}{r^3} \mathbf{x} & (R < r) \\ -\frac{GM}{R^3} \mathbf{x} & (0 < r \leq R) \end{cases}. \quad (71.5)$$

$R < r$ においては原点にある質量 M の質点がつくる重力場と同じである。他方 $0 < r \leq R$ においては少し変形して、

$$\mathbf{F}_G(\mathbf{x}) = - \left(M \frac{r^3}{R^3} \right) \frac{G}{r^3} \mathbf{x},$$

とすると半径 r 、質量 $M(R^3/r^3)$ の球による重力と一致していることがわかる。すなわち、球内部にあっては観測点より内部の質量のみの寄与でその外側にある厚み $R - r$ の殻からの重力は相殺して寄与しない。これを **Newton の球殻定理** (shell theorem) という。この事実は密度 ρ を球対称 $\rho(r)$ にしても同様に成立する。

地球上のわれわれはだいたい地球の半径 R のところでの重力ポテンシャル $\phi_G(R)$ を感じる。すなわち $\phi_G(R) = -GM/R$ であり、はたらく力は中心向きに GM/R^2 である。一方地上では (17.1) より一様重力場 mg が中心向きに働くと近似すると、

$$g = \frac{GM}{R^2}, \quad (71.6)$$

が成り立つ。重力定数と重力加速度の関係が得られた。日常に経験する長さのスケールならこの g を用いた一様重力場を仮定してよい。 $R \sim 6700\text{km}$ というオーダーであるからたとえ海拔 0m とエベレストの頂上 (およそ海拔 8km) での重力を比較しても 1% も差がない。

PROBLEM

PROBLEM1. **第一宇宙速度**：質点が半径 R で地球の周りを等速円運動をするときの速さを求めよ。

SOLUTION. 等速円運動のときの速さは $v = R\dot{\theta}$ であった。また円運動するための引力との関係は $F = m\dot{\theta}^2 R$ だから、

$$\frac{GMm}{R^2} = m\dot{\theta}^2 R = \frac{mV^2}{R}.$$

これから速度に対する条件：

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

が得られ、具体的に計算すると約 7.9km/s となる。

PROBLEM2. **第二宇宙速度**：地上の物体 (たとえばロケット) が地球の重力を脱するための速さを求めよ。

SOLUTION. 力学的エネルギーは、

$$E = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

ただし $L = mr^2\dot{\theta}$ は角運動量。ロケットは地上から鉛直上向きにまっすぐ進むとすると角速度は $\dot{\theta} = 0$ であり角運動量も 0 に等しい。よって遠心力ポテンシャルの項はおちる。地上 $r = R$ で十分なエネルギーを与えれば重力ポテンシャルがない無限遠でエネルギーが正となるようにできる。それは地球の引力を脱するための条件と等価である。すなわち、

$$\frac{m}{2} V_0^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{m}{2} V^2 \geq 0.$$

これから無限遠で速度が 0 でない値を持つための初速に対する条件は、

$$V_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

右辺は地球の引力を脱するための最小の速度であり、具体的に計算すると約 11.2 km/s となる。

PROBLEM3. 密度分布 $\rho(r)$, 半径 R の球のつくる重力場を求めよ。

SOLUTION.

§ 72. 潮汐力

地球上では地球からの重力だけでなく、太陽や月からの重力も少なからず働いている。これらの影響が最も顕著である現象が潮の満ち引きである。この節では潮汐力について調べていこう。

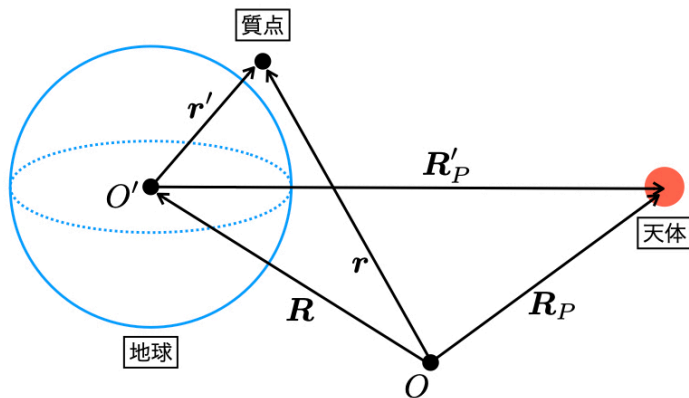


図 134 地球と天体の重力場下にある質点

地球と月や太陽のような一つ別の天体の重力場で運動する質点を考えよう。そして簡単のために地球と別天体の公転・自転運動は無視する。慣性基準系をとってこの座標系で見たときの質点の座標を \mathbf{r} , 地球の座標を \mathbf{R} , 天体の座標を \mathbf{R}_P とおく。また質点, 地球, 天体の質量をそれぞれ m, M, M_P とする。質点の運動方程式は前節の結果を用いると

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) - \frac{GmM_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_P|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_P), \quad (72.1)$$

と立式できる。第 1 項が地球からの重力, 第 2 項が天体からの重力である。

同様に地球については

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{GMm}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}(\mathbf{R} - \mathbf{r}) - \frac{GMM_P}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_P|^3}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_P),$$

であるが質点 m は天体に比べると非常に小さいので重力の影響は相対的に無視できる。よって第 1 項は無視して

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \simeq -\frac{GMM_P}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_P|^3}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_P), \quad (72.2)$$

と近似する.

(72.1) を m で割って, (72.2) を M で割ってから二式の差をとると相対座標 $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ についての方程式

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = -\frac{GM}{r'^3} \mathbf{r}' - \frac{GM_P}{|\mathbf{r}' - \mathbf{R}'_P|^3} (\mathbf{r}' - \mathbf{R}'_P) - \frac{GM_P}{R_P'^3} \mathbf{R}'_P, \quad (72.3)$$

が得られる. ただし天体の相対座標を $\mathbf{R}'_P = \mathbf{R}_P - \mathbf{R}$ とおいた. 地球から見た質点を感じる正味の重力は

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') = -m \left(\frac{GM}{r'^3} \mathbf{r}' + \frac{GM_P}{|\mathbf{r}' - \mathbf{R}'_P|^3} (\mathbf{r}' - \mathbf{R}'_P) + \frac{GM_P}{R_P'^3} \mathbf{R}'_P \right), \quad (72.4)$$

となる. この表式から $\nabla(1/r) = -\mathbf{x}/r^3$ より地球と天体によって作られている重力ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi_G(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{m} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} d\mathbf{l}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') \\ &= -\frac{GM}{|\mathbf{x}|} - \frac{GM_P}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}'_P|} + \frac{GM_P}{R_P'^3} \mathbf{R}'_P \cdot \int_{\mathbf{x}} d\mathbf{l}' + \text{const.}, \end{aligned}$$

と計算される. 積分範囲は適当なポテンシャルの基準点 \mathbf{x}_0 から観測点 \mathbf{x} までである. 天体の座標が x' 軸上にあつて $\mathbf{R}'_P = R_P' \mathbf{e}_{x'}$ となるように座標系をうまく選べば,

$$\phi_G(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{|\mathbf{x}|} - \frac{GM_P}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}'_P|} + \frac{GM_P}{R_P'^2} x + \text{const.}, \quad (72.5)$$

後ろの定数項 (基準点での値) は力の計算に影響しないので無視する (また第 3 項の x は観測点 \mathbf{x} の x' 成分であることに注意せよ).

いま地表付近に興味があるので $|\mathbf{x}| \ll R_P'$ と仮定しよう. このとき Taylor 展開と $\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}'_P = xR_P'$, $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + 3x^2/8 + \dots$ により

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}'_P|} &= \frac{1}{R_P'} \left[1 - 2\frac{x}{R_P'} + \frac{|\mathbf{x}|^2}{R_P'^2} \right]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{R_P'} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-2\frac{x}{R_P'} + \frac{|\mathbf{x}|^2}{R_P'^2} \right) + \frac{3}{8} \left(-2\frac{x}{R_P'} + \frac{|\mathbf{x}|^2}{R_P'^2} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{R_P'} + \frac{x}{R_P'^2} + \frac{3x^2 - |\mathbf{x}|^2}{2R_P'^3} + \dots \end{aligned}$$

とし $|\mathbf{x}|/R_P'$ の 3 次以降の寄与は無視する. これより,

$$\phi_G(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{|\mathbf{x}|} - \frac{GM_P}{2R_P'^3} (3x^2 - |\mathbf{x}|^2) + \text{const.} \quad (72.6)$$

あるいは球面座標で $x = |\mathbf{x}| \sin \theta \cos \varphi$ とおいて定数項を無視すれば,

$$\phi_G(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{|\mathbf{x}|} - \frac{GM_P |\mathbf{x}|^2}{2R_P'^3} (3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1), \quad (72.7)$$

が得られる。第1項は地球の重力の寄与であり、第2項が天体の存在による影響を表す。第2項から来る重力ポテンシャル

$$\phi_T(\mathbf{x}) = -\frac{GM_P|\mathbf{x}|^2}{2R_P^3} (3\sin^2\theta \cos^2\varphi - 1), \quad (72.8)$$

を起潮ポテンシャル (tide-generating potential) といい、単位質量あたりの力 $\mathbf{f}_T = -\nabla\phi_T$ を起潮力という。

座標 \mathbf{r}' にある質点を受ける起潮力を球面極座標 (r', θ, φ) で計算する。勾配が

$$\nabla = \mathbf{e}_{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

なので

$$\begin{aligned} (f_T)_{r'} &= \frac{GM_P r'}{R_P^3} (3\sin^2\theta \cos^2\varphi - 1), \\ (f_T)_\theta &= \frac{3GM_P r'}{R_P^3} \sin\theta \cos\theta \cos^2\varphi, \\ (f_T)_\varphi &= -\frac{3GM_P r'}{R_P^3} \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi, \end{aligned} \quad (72.9)$$

となる。この起潮力によって地球上の海水が流されて潮の満ち引きが起こると説明できる。ただし起潮力の大きさは r'/R_P 程度の小さい量であることに注意せよ。

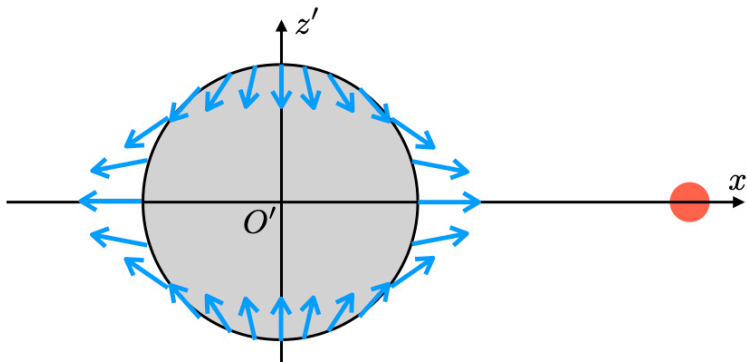


図 135 地球上の起潮力 ($\varphi = 0, \pi$ の断面に対応)

地球が完全な球状でその上を全て海水が覆っているとしよう。外部の天体の影響がなければ海水は球状に覆う。そのときの地球の中心から海面までの距離を d_0 とする。地球の半径を R_\oplus とすれば海水の全体積は

$$V_{\text{sea}} = \int d\Omega \int_{R_\oplus}^{d_0} dr' r'^2 = \frac{4\pi}{3} (d_0^3 - R_\oplus^3)$$

別天体による起潮力によって海面が変わっても海水の全体積は保存すると仮定する。したがって別天体が存在するときの海面までの距離を $d(\theta, \varphi)$ とおくと

$$V_{\text{sea}} = \int d\Omega \int_{R_{\oplus}}^{d(\theta, \varphi)} dr' r'^2 = \frac{1}{3} \int d\Omega d(\theta, \varphi)^3 - \frac{4\pi}{3} R_{\oplus}^3, \quad (72.10)$$

二式の差を取って整理すると

$$0 = \int d\Omega \left(d(\theta, \varphi)^3 - d_0^3 \right).$$

起潮力の影響が小さいので $d - d_0$ の一次まで残すことにすると、この条件は

$$\int d\Omega \left(d(\theta, \varphi) - d_0 \right) = 0. \quad (72.11)$$

となる（上の被積分関数を $d - d_0$ で Taylor 展開せよ）。

また海面が静的な力学的平衡であるためには任意の θ, φ で重力ポテンシャルが一定でなければならない（もし一定でなければ起潮力が生じて海水の流れが生じる）。すなわち

$$\phi_G(d, \theta, \varphi) = -\frac{GM}{d(\theta, \varphi)} - \frac{GM_P d(\theta, \varphi)^2}{2R_P^3} \left(3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1 \right) \equiv \phi_0, \quad (72.12)$$

が課せられる。第 1 項においては

$$\frac{1}{d(\theta, \varphi)} = \frac{1}{d_0 + d(\theta, \varphi) - d_0} \simeq \frac{1}{d_0} + \frac{d(\theta, \varphi) - d_0}{d_0^2}$$

と近似できる。また第 2 項の d^2 を d_0^2 に置き換えても R_P^{-3} があるためにその誤差は無視できるほど小さい。よって

$$d - d_0 \simeq C_0 + \frac{M_P}{M} \cdot \frac{d_0^4}{2R_P^3} \left(3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1 \right), \quad (72.13)$$

と書き換えられる。ただし $C_0 = d_0 - d_0^2 \phi_0 / (GM)$ とおいた。この式を海水の体積一定の条件 (72.11) へ代入して計算すれば

$$C_0 = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{M_P}{M} \cdot \frac{d_0^4}{2R_P^3} \int d\Omega \left(3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1 \right) = 0,$$

がわかる。

こうして海水面の潮位の変化 $h(\theta, \varphi) := d(\theta, \varphi) - d_0$ は天体が十分遠方にあるという仮定の元では

$$h(\theta, \varphi) \simeq \frac{M_P}{M} \cdot \frac{d_0^4}{2R_P^3} \left(3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1 \right), \quad (72.14)$$

で与えられる。¹⁰⁾ 潮位の変化は与えられた θ に対しては $\varphi = 0, \pi$ において最大、すなわち満潮となる。その中でも $\theta = \pi/2$ において潮位は最大である。反対に $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ では潮位が最小、つまり干潮である（ $\theta = 0, \pi$ で干潮は最小）。

¹⁰⁾ 海の水深 $d_0 - R_{\oplus}$ は地球の半径比べて小さいので分子の d_0^4 は R_{\oplus}^4 に置き換えても良い。

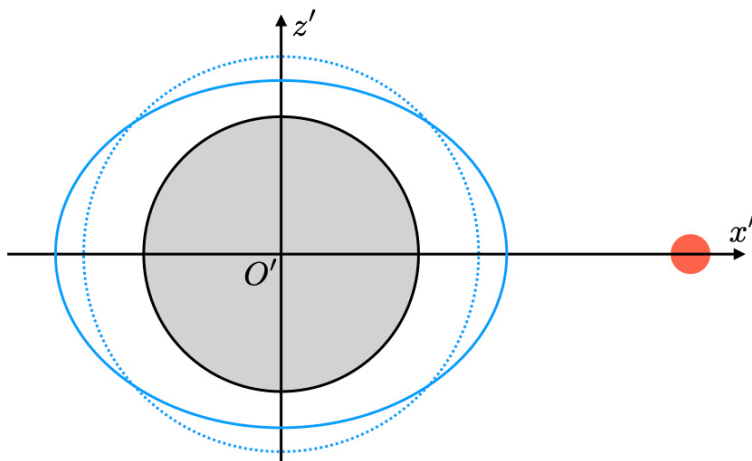


図 136 潮位の変化の概略図: 天体と同軸上にある点では潮位が高くなり, 軸に対し垂直な位置では潮位が下がる.

天体が2つあるときの潮位の変化をそれぞれの寄与 (72.14) の和で近似してみよう. 2つの天体による潮位の最大値の比は

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{M_{1P}}{M_{2P}} \cdot \left(\frac{R'_{2P}}{R'_{1P}} \right)^3, \quad (72.15)$$

であり2つの天体の質量とその天体までの距離に依存している. 太陽と月を例にとってみる. 潮位の変化は $h \simeq h_{\odot} + h_L$ とすると h は太陽・地球・月が一直線上に並ぶときに最大となる. これを**大潮** (spring tide) という.

参考文献

- [1] V. D. バージャー, M. G. オルソン, 『力学—新しい視点にたって』, (培風館, 1992).
- [2] 山本義隆, 中村孔一, 『解析力学 1 (朝倉物理学大系)』, (朝倉書店, 1998)
- [3] L. D. ランダウ, E. M. リフシツ, 『力学』, (東京図書, 1986).
- [4] ゴールドスタイン, ポール, サーフコ, 『古典力学 (上)』, (吉岡書店, 2006).
- [5] 江沢洋, 中村孔一, 山本義隆, 『演習詳解 力学 [第2版]』, (筑摩書房, 2022).
- [6] 杉浦光夫, 『解析入門 I』, (東京大学出版会, 1980).
- [7] 杉浦光夫, 『解析入門 II』, (東京大学出版会, 1985).
- [8] 佐武一郎, 『線型代数学』, (裳華房, 1958).
- [9] 神保道夫, 『複素関数入門』, (岩波書店, 2003).
- [10] 武藤義夫, 『ベクトル解析』, (裳華房, 2011).
- [11] 寺沢 寛一, 『自然科学者のための数学概論』, (岩波書店, 1983).
- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, (Butterworth-Heinemann, 1987).
- [13] 松川宏, 摩擦の物理, (岩波書店, 2012) .
- [14] 多摩川精機株式会社, 『ジャイロセンサ技術 (ポイント解説)』, (東京電機大学出版局, 2011).

索引

Amontons–Coulomb の法則, 75

bar (バー), 131
Borda の振り子, 258

Cauchy–Schwarz の不等式, 18
Cauchy の平均値の定理, 39
Cavendish の実験, 201
CGS 単位系, 130
 C^n 級関数, 59
Coriolis 力, 235
Cramer の公式, 157
 C^∞ 級関数, 59

dyn (ダイン), 130
Dzhanibekov 効果, 266

ϵ - δ 論法, 28
erg (エルグ), 130
Euler 角, 263
Euler 方程式 (剛体の), 260

Foucault の振り子, 238
Fourier 変換, 173
FPS 単位系, 131

Galilei の相対性原理, 68
Galilei 変換, 67

Heaviside の階段関数, 176
Heron の公式, 19
Hooke の法則, 132

J (ジュール), 130
Jacobian, 215
Jacobi 行列, 215
Jacobi 恒等式, 22
Jordan の補助定理, 174, 175

Kater の可逆振り子, 257
Kepler の第一法則, 203
Kepler の第三法則, 204
Kepler の第二法則, 203
Kronecker のデルタ, 21

l'Hospital の定理, 40
Lagrange コマ, 264
Lagrange 点, 210
Lagrange の剰余項, 51
Lagrange の平均値の定理, 39
Laplace–Runge–Lenz ベクトル, 205

Leibniz 則, 31
Levi-Civita 記号, 20
Lorentz 摩擦, 58

Maclaurin 展開, 52
MKS 単位系, 130

N (ニュートン), 130
Napier 数, 28
Neil の放物線, 237
Newton の運動方程式, 63
Newton の球殻定理, 283
Newton のゆりかご, 115
 n 階微分, 56

Pa (パスカル), 131

Q 値, 182

Rolle の定理, 38
Rutherford 散乱断面積, 232

Steiner の定理, 252

Taylor 展開, 52
Taylor の定理, 51
Tsiolkovsky の式, 110

圧力, 131

位相 (phase), 134
位置, 9
位置エネルギー, 95
一次近似, 51
位置ベクトル, 14
一様重力場, 95

上三角行列, 153
運動エネルギー, 95
運動の法則, 66
運動方程式, 63
運動量, 108
運動量保存則, 108

エネルギー, 95
エネルギーの原理, 103
円運動, 84
遠心力, 91, 235
遠心力ポテンシャル, 185, 194
円筒座標, 189

大潮, 288

- 開区間, 45
- 外積, 17
- 回転座標系, 90
- 回転変換, 93
- 外力, 65
- 可換 (微分の), 59
- 角運動量, 184
- 角運動量保存則, 184
- 角振動数, 134
- 角速度, 85
- 角速度ベクトル, 234
- 過減衰, 141
- 重ね合わせの原理, 145, 168
- 加速度, 56
- 換算質量, 117
- 慣性系, 66
- 慣性主軸, 243, 260
- 慣性の法則, 64, 66
- 慣性モーメントテンソル, 243
- 慣性力, 88
- 完全弾性衝突, 108, 119
- 完全反対称性, 20
- 完全非弾性衝突, 108
- ガンマ函数, 139

- 基準モード, 163
- 奇置換, 150
- 起潮ポテンシャル, 286
- 起潮力, 286
- 基底, 187
- 軌道, 12
- 擬ベクトル, 92
- 基本行列, 148
- 逆位相, 145
- 逆行列, 147
- 球座標, 13
- 球面極座標, 13, 190
- 共鳴, 181
- 行列, 145
- 行列式, 150
- 極座標, 187
- 極性ベクトル, 92
- 近接力, 65
- 近傍, 28

- 空気抵抗, 80
- 偶置換, 150
- 区間, 45
- 区分求積法, 45

- 系, 10
- 撃力, 124
- 原始函数, 41
- 原点, 9, 11

- 向心力, 85
- 拘束条件, 10
- 剛体, 240
- 勾配, 60
- 互換, 150
- 固有値, 158
- 固有ベクトル, 158

- 固有方程式, 158
- 歳差運動, 265, 275
- 最大・最小値の定理, 37
- 座標, 11
- 座標系, 12
- 鎖法則, 34
- 作用・反作用の法則, 65
- 散逸, 106, 141
- 三角行列, 153
- 三角不等式, 13
- 三体問題, 207
- 散乱角, 121, 227

- 時間発展, 23
- 時間反転, 92
- 時空間, 9
- 軸性ベクトル, 92
- 次元, 129
- 自己エネルギー, 202
- 時刻, 9
- 仕事, 103
- 仕事率, 180
- 自然長, 132
- 下三角行列, 153
- 実験室系, 119
- 質点, 10
- 質量, 63
- 支点, 253
- ジャイロコンパス, 280
- ジャイロスコープ, 279
- 斜方投射, 70
- 周期, 85, 134
- 重心系, 118
- 重心座標, 116
- 収束, 26
- 終端速度, 81
- 周期的境界条件, 169
- 自由度, 10
- 重力, 68
- 重力加速度, 68
- 重力定数, 201
- 重力場, 202
- 重力ポテンシャル, 201
- 主慣性モーメント, 259
- 瞬間の速さ, 25
- 章動, 276
- 初期条件, 57
- 振動 (極限の), 26
- 振動数, 135
- ジンバル, 280
- 振幅, 133

- 垂直抗力, 65, 70
- スカラー, 15
- スカラー三重積, 20
- スカラー四重積, 22
- スケール, 129
- ステラジアン, 222

- 静止摩擦係数, 76
- 静止摩擦力, 76

- 正則行列, 147
- 制動距離, 106
- 成分 (ベクトルの), 14
- 正方行列, 145
- 積分, 41
- 積分定数, 41
- 接線, 31
- 接ベクトル, 221
- 零行列, 147
- 線型性 (微分の), 31
- 線積分, 100
- 全微分, 59
- 全微分可能, 59

- 相互作用, 65
- 相対位置ベクトル, 16
- 相対的, 12
- 速度, 35
- 速度ベクトル, 35

- ダイアド, 146
- 第一宇宙速度, 283
- 第一種永久機関, 106
- 第一種完全楕円積分, 112
- 対角化, 160
- 対称行列, 158
- 対称コマ, 264
- 対称性, 91
- 体積積分, 213
- 体積要素, 213
- 多重積分, 62
- 多体問題, 119
- 多段式垂直衝突球, 127
- 単位, 129
- 単位行列, 147
- 単位系, 130
- 単純歳差運動, 278
- 単振動, 133
- 弾性衝突, 119

- 力, 63
- 力のモーメント, 244
- 置換, 150
- 置換積分, 48
- 中間値の定理, 29
- 中心力場, 183
- 直交行列, 159
- 直交座標, 11

- つりあっている, 64

- 抵抗, 139
- 定積分, 45
- てこの原理, 254
- テニスラケットの定理, 266
- 転回点, 195
- 転置行列, 147

- 同位相, 145
- 導関数, 30
- 等時性, 113
- 等速直線運動, 64

- 動摩擦係数, 76
- 動摩擦力, 76
- 特性函数, 213
- 特性方程式, 139
- 特解, 173
- トルク, 244
- トロヤ群, 211

- 内積, 16

- 入射粒子, 226

- 眠りゴマ, 276

- 場, 202
- 媒介変数表示, 84
- 発散 (極限の), 27
- 場の理論, 202
- 速さ, 25, 36
- パリティ奇, 92
- パリティ偶, 92
- パリティ対称性, 92
- パリティ変換, 92
- 反対称行列, 158
- 半値幅, 181
- 反発係数, 108

- 非慣性基準系, 233
- 非慣性系, 67
- 微小線要素, 98
- 微小面積要素, 219
- 非斉次微分方程式, 173
- 微分, 30
- 微分可能, 30
- 微分係数, 30
- 微分散乱断面積, 227
- 微分積分学の基本定理, 47
- 微分方程式, 64
- 標的粒子, 226

- 復元力, 132
- 不定形, 39
- 不定積分, 41
- 部分積分, 42
- 振り子, 110

- 平均の速さ, 25
- 閉区間, 45
- 並進変換, 93
- ベクトル, 14
- ベクトル三重積, 21
- 変位ベクトル, 35
- 偏微分, 58

- 方向微分, 36, 61
- 方向ベクトル, 19, 61
- 法線ベクトル, 218
- 放物線軌道, 71
- 保存量, 94
- 保存力, 105
- ポテンシャル, 105
- ポテンシャルエネルギー, 95

摩擦, 75, 103

見かけの力, 88, 194

無次元量, 130

面積速度保存則, 203

面積分, 219

モンキーハンティング, 73

躍度, 58

有界性定理, 37

有効重力加速度, 236

余因子, 154

余因子展開, 156

余弦定理, 17

力学的エネルギー保存則, 95, 105

力学的平衡, 64

力積, 107

立体角, 222

臨界減衰, 142

累次積分, 213

ループ, 99

連成振動, 142

連続, 27